

Interpolacja Lagrange'a funkcji niesymetrycznej z optymalizacją położenia węzłów.

Tomasz Chwiej

22 kwietnia 2021

1 Wprowadzenie

Celem interpolacji Lagrange'a jest wyznaczenie współczynników wielomianu interpolacyjnego

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \quad (1)$$

gdzie: x_i to węzły interpolacji, $y_i = y(x_i)$ to wartości funkcji interpolowanej w węzłach, a węzły indeksowane są $i = 0, 1, \dots, n$. Jeśli x_a oraz x_b stanowią lewy i prawy brzeg przedziału interpolacji to położenia węzłów równomiernie rozłożonych opisuje formuła

$$x_i = x_a + i \cdot \Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

gdzie odległość międzywęzłami wynosi

$$\Delta x = \frac{x_b - x_a}{n} \quad (3)$$

Jeśli rezygnujemy z równomiernego rozmieszczenia węzłów i chcemy je rozmieścić w sposób optymalny, wówczas położenia węzłów interpolacji określają zera wielomianów Czebyszewa

$$x_i = \frac{1}{2} \left[(x_b - x_a) \cos \left(\pi \frac{2 \cdot i + 1}{2 \cdot n + 2} \right) + (x_a + x_b) \right], \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4)$$

Dysponując zestawem węzłów i wartości funkcji pierwotnej (interpolowanej) wartość wielomianu interpolacyjnego można wyznaczyć adaptując poniższy pseudokod

```
inicjalizacja : wielomian=0;
for (i=0; i<=n; i++){
  for (j=0; j<=n; j++){
    inicjalizacja : L=1, M=1
    if ( i!=j ) {
      L *= (x-x_j)
      M *= (x_i-x_j)
    }
    wielomian += y_i * L/M
  }
}
```

2 Zadania do wykonania

1. Celem jest interpolacja funkcji

$$y(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (5)$$

w przedziale $x \in [-3, 8]$

2. Wykonać interpolację funkcji $y(x)$ dla $n = 5, 10, 15$. Dla każdego n należy wykonać interpolację dla: i) węzłów rozłożonych równomiernie oraz ii) węzłów liczonych jako zera wielomianów Czebyszewa.
3. Dla każdego n sporządzić rysunek zawierający przebieg funkcji $y(x)$ oraz obu wielomianów interpolacyjnych (węzły równomiernie i nierównomiernie rozłożone). Wykresy mają być gładkie tj. wykonane dla dużej liczby punktów np. 100 lub 200.
4. W sprawozdaniu należy przeanalizować wpływ liczby węzłów oraz ich rozłożenia na wynik (jakość) interpolacji.