

Modelowanie transportu fotonów

Plan wykładu:

- transport fotonów - wstęp
- opis ilościowy rozpraszania i absorpcji światła w ośrodku mętnym
- równanie transportu radiacyjnego
 - funkcja rozpraszania
 - współczynnik anizotropii
- algorytm MC transportu fotonów
- przykłady transportu fotonów w materiale wielowarstwowym

Literatura:

- L. Wang, S. Jacques, L. Zheng, „**MCML-MC modeling of light transport in multi-layered tissues**”, Computer Methods and Programs in Biomedicine 47, (1995) 131-146
- A. Welch, M. van Gemert, „**Optical-thermal response of laser-irradiated tissue**”, Springer
- V. Periyasamy, M. Pramanik, „**Advances in MC simulation for light propagation in tissue**”, IEEE Reviews In Biomedical Engineering 10, (2007)122
- J. Jonsson, E. Berrocal, „**Multi-Scattering software: part 1: online accelerated MC simulation of light transport through scattering media**”, Optics Express 28, (2020) 37612
- C. Bohren, D. Huffman, „**Absorption and Scattering of light by small particles**”, Wiley

Jedną z nieniszczących metod badawczych własności materiałów lub substancji (płyny, ciecze czy gazy) częściowo przezroczystych polega na skierowaniu skolimowanej wiązki fotonów z zakresu widzialnego (400-700 nm) na badany obiekt i obserwacji jej zachowania. Obiekt przezroczysty jak np. szkło czy plastik zazwyczaj powodują tylko niewielkie zaburzenia pierwotnej trajektorii wiązki. Natomiast materiały zawierające wiele centrów rozpraszających powodują zmianę kierunku fotonów co prowadzi do rozmycia pierwotnie skolimowanej wiązki. W obu przypadkach mamy do czynienia z **transportem fotonów** (promieniowania, energii), przy czym w pierwszym przypadku ma on charakter **balistyczny**, natomiast w drugim **dyfuzyjny**. O ile materiały przezroczyste o jak najmniejszym współczynniku rozproszenia i absorpcji są pożądane jeśli chodzi o zastosowania w optyce (soczewki, światłowodów), to materiały/substancje częściowo przezroczyste (**mętne**, ang. **turbid**) są w zasadzie zupełnie nieprzydatne w tej dziedzinie. Jednak ze względu na silne oddziaływania z fotonami można analizować ich własności fizyczne wykorzystując źródła fotonów i badając sposób rozchodzenia się wiązki rozproszonej.

Przykłady materiałów mętnych/nieprzezroczystych spotykanych w życiu codziennym



Foton poruszając się w materiale mętnym oddziałują z ośrodkiem rozpraszając się

- elastycznie (bez straty energii)
- nieelastycznie (częściowa lub całkowita strata energii)
- rozpraszanie elastyczne prowadzi zazwyczaj do zmiany trajektorii fotonu, natomiast w wyniku rozpraszania nieelastycznego foton może zostać zaabsorbowany, lub oddać część swej energii zmieniając dodatkowo kierunek lotu
- oba mechanizmy rozpraszania mają charakter statystyczny i opisywane są najczęściej przy użyciu makroskopowych współczynników:
 - rozpraszania (μ_s)
 - absorpcji (μ_a)
- ponadto wartości tych współczynników mogą zależeć od
 - energii fotonów (długości fali),
 - mogą mieć charakter progowy (wymagana minimalna energia fotonów)
 - temperatury ośrodka
 - polaryzacji fotonów

Ze względu na różnorodność oddziaływań fotonów z materią oraz ze względu na fakt iż oddziaływanie to jest nieniszczące i niejonizujące powstało wiele metod badawczych wykorzystujących mechanizmy rozpraszania

- dyfuzyjna spektroskopia odbiciowa (diffuse reflectance spectroscopy)
- spektroskopia w bliskiej podczerwieni (near-infrared spectroscopy)
- dyfuzyjna tomografia optyczna (diffuse optical tomography)
- koherencyjna tomografia optyczna (optical coherence tomography)
- obrazowanie fotoakustyczne (photoacoustic imaging)
- spektroskopia Ramanowska

Ze względu na stochastyczny charakter oddziaływań fotonów z materią, w modelowaniu komputerowym rozpraszania fotonów stosuje się metodę MC. W pojedynczej symulacji MC generowane są trajektorie wzdłuż, których poruszają się paczki fotonów, przy czym rejestruje się pojedyncze akty rozpraszania (absorpcji). Dane uśrednione dla wielu takich ścieżek pozwalają uzyskać statystyczny obraz rozkładu przestrzennego oddziaływań, na który ma wpływ np. kolimacja wiązki, jej kierunek, energia fotonów, topologia układu etc. Wyniki symulacji MC służą lepszemu zrozumieniu mechanizmów rozpraszania bo pozwala przełożyć mikroskopowy obraz rozpraszania na obraz w makroświecie. Może być też wykorzystywana w projektowaniu i kalibracji urządzeń.

Oddziaływanie fotonów z materią

- jeśli na ośrodek zostanie skierowana skolimowana wiązka fotonowa, to jej natężenie maleje wraz ze wzrostem odległości od źródła, natężenie wiązki przechodzącej opisuje prawo Lamberta-Beera

$$I = I_0 e^{-\mu_e l}$$

$$\mu_e = \mu_s + \mu_a \quad [cm^{-1}]$$

- współczynnik ekstynkcji (całkowity współczynnik rozproszenia)
- współczynnik absorpcji i rozpraszania zależą od przekrojów czynnych cząsteczek oraz ich koncentracji w ośrodku

$$\mu_e = N \sigma_e \quad \sigma_e \rightarrow [cm^2], \quad N \rightarrow [cm^{-3}]$$

$$\sigma_e = \sigma_s + \sigma_a$$

- dla prostych geometrii (sfera, walec, elipsoida) przekroje czynne można obliczyć analitycznie

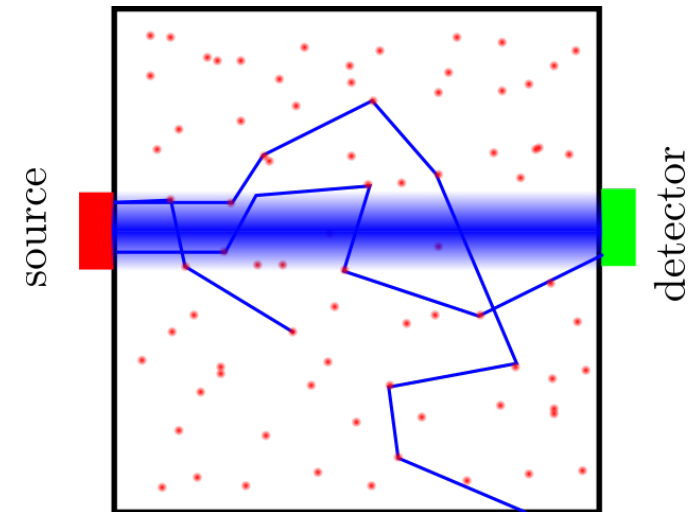
- w celu określenia charakteru oddziaływań w ośrodku możemy zdefiniować wielkość odpowiadającą **albedo**

$$\omega = \frac{\mu_s}{\mu_s + \mu_a} = \frac{\sigma_s}{\sigma_s + \sigma_a} = \begin{cases} 0 & \text{brak absorpcji} \\ \approx 1 & \text{silna absorpcja} \end{cases}$$

przykłady:

- cząsteczki sadzy: $\omega \sim 1$
- kropla wody: $\omega \ll 1$
- komórki krwi: $0 < \omega < 1$

Wybijanie fotonów z pierwotnego kierunku wiązki w wyniku rozpraszania na cząsteczkach.



Wpływ rozproszeń na drogę swobodną fotonu

- fotony w ośrodku poruszają się wzdłuż prostej, której kierunek zmienia się w wyniku rozproszenia, odległość między dwoma kolejnymi punktami, w których foton ulega rozproszeniu jest wielkością losową teoretycznie odległość ta może być nieograniczona

$$x \in (0, \infty)$$

- prawdopodobieństwo rozproszenia na jednostkę długości w przedziale $(x', x'+dx')$ określa współczynnik μ

$$\mu = \frac{-dP\{x \geq x'\}}{P\{x \geq x'\}dx'}, \quad x \in [x', x' + dx']$$

- spodziewamy się, że realizacja krótszej ścieżki będzie bardziej prawdopodobna niż dłuższej – nachylenie ujemne, stąd minus

po rozdzieleniu zmiennych i wycałkowaniu otrzymujemy

$$\frac{dP\{x \geq x'\}}{P\{x \geq x'\}} = -\mu dx' \quad \rightarrow \quad P\{x \geq x_1\} = - \int_0^{x_1} \mu dx' = \exp(-\mu x_1)$$

natomiast z warunku normalizacji wynika

$$P\{x < x_1\} + P\{x \geq x_1\} = 1 \quad \rightarrow \quad P\{x < x_1\} = 1 - \exp(-\mu x_1)$$

otrzymaliśmy dystrybuantę dla rozkładu eksponencjalnego

$$F(x) = 1 - \exp(-\mu x)$$

możemy policzyć fgp rozkładu

$$p(x) = \frac{dF}{dx} = \mu \exp(-\mu x)$$

teraz możemy określić średnią drogę swobodną pomiędzy dwoma kolejnymi aktami rozproszenia

$$l_{sr} = \int_0^{\infty} x \mu \exp(-\mu x) dx = \frac{1}{\mu}$$

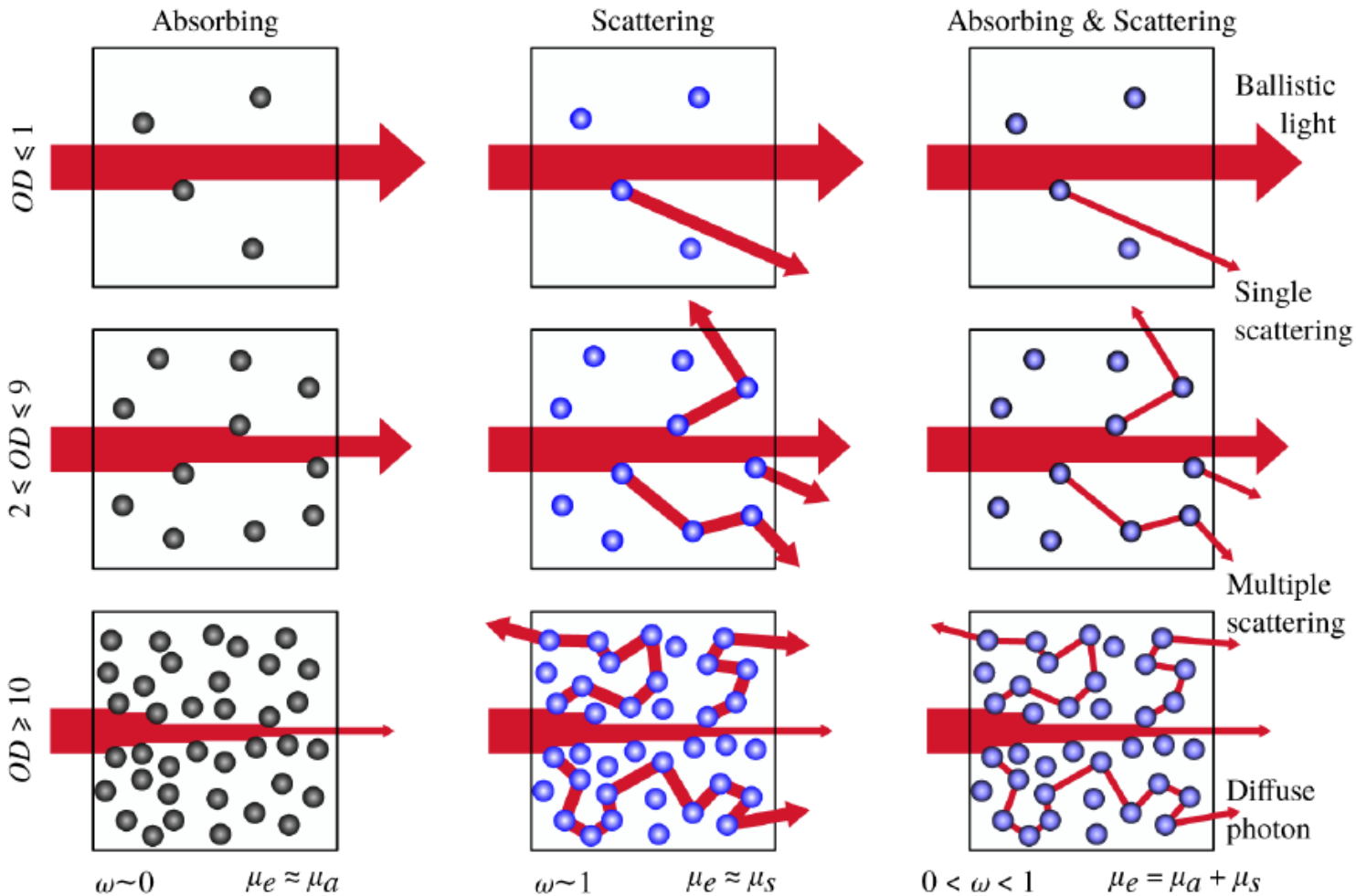
$$l_{sr} = \frac{1}{\mu}$$

Długość optyczna ośrodka – a charakter oddziaływania

Znając średnią drogę swobodną oraz rozmiar poprzeczny obiektu na który pada wiązka fotonów możemy określić parametr zwany długością optyczną – jego wielkość określa statystycznie charakter oddziaływania wiązki z ośrodkiem

$$OD = \frac{d}{l_{sr}} = \mu d$$

- $OD < 1$ – transport balistyczny
- $1 < OD < 10$ – transport w obszarze słabego rozproszenia
- $OD > 10$ – obszar silnej dyfuzji



Równanie transportu promieniowania

- natężenie skolimowanej wiązki promieniowania padającej na obiekt zmniejsza się w wyniku aktów rozproszenia i absorpcji (strata)
- jednak część rozproszonych fotonów może powrócić, w wyniku kolejnych rozproszeń, w obszar wiązki pierwotnej (zysk)
- dla takiego procesu możemy zapisać ogólne równanie określające zmiany czasowe intensywności wiązki – równanie transportu, które ma postać równania typu Master

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I(\vec{r}, \vec{s}, t)}{\partial t} = -\mu_s I(\vec{r}, \vec{s}, t) - \mu_a I(\vec{r}, \vec{s}, t) + \mu_s \int_{\Omega} f(\vec{s}, \vec{s}') I(\vec{r}, \vec{s}', t) d\Omega'$$

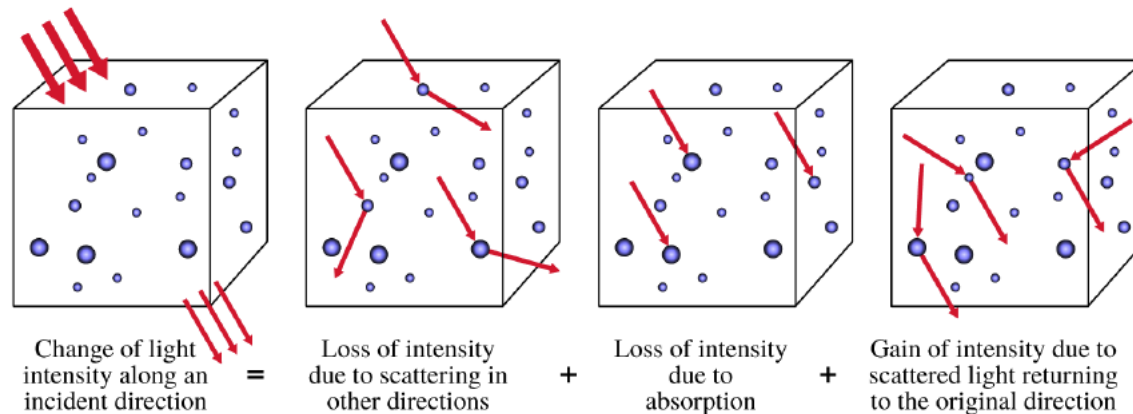
c - prędkość światła

Ω - pełny kat bryłowy

\vec{r} - wektor położenia

\vec{s} - kierunek wiązki

$f(\vec{s}, \vec{s}')$ - potencjał rozpraszający (ang. scattering phase function)



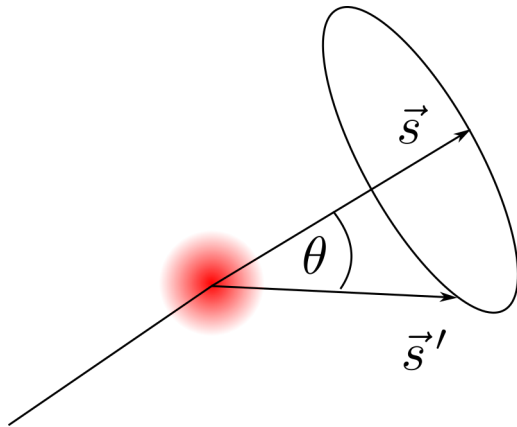
- w symulacji potencjał rozpraszający odgrywa kluczową rolę, gdyż to on decyduje w jaki sposób fotony zmieniają kierunek podczas rozpraszania (w procesie absorpcji fotony znikają)

Potencjał rozpraszający

- jako że odpowiada on **tylko** za zmianę kierunku, możemy go utożsamiać z warunkową funkcją gęstości prawdopodobieństwa, podlega warunkowi normalizacji

$$\int_{\Omega} f(\vec{s}, \vec{s}') d\Omega' = 1$$

- dla prostych geometrii cząsteczek rozpraszających (sfera), można jej wartość wyznaczyć analitycznie wykorzystując teorię rozpraszania w **ujęciu Lorenza-Mie**
- funkcję rozpraszania definiuje się zazwyczaj w postaci, w której jej argumentem jest kąt rozproszenia θ liczony względem pierwotnego kierunku wiązki, natomiast drugi kąt φ jest zmienną losową o rozkładzie jednorodnym



$$f(\vec{s}, \vec{s}') = f(\theta) \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

warunek normalizacji

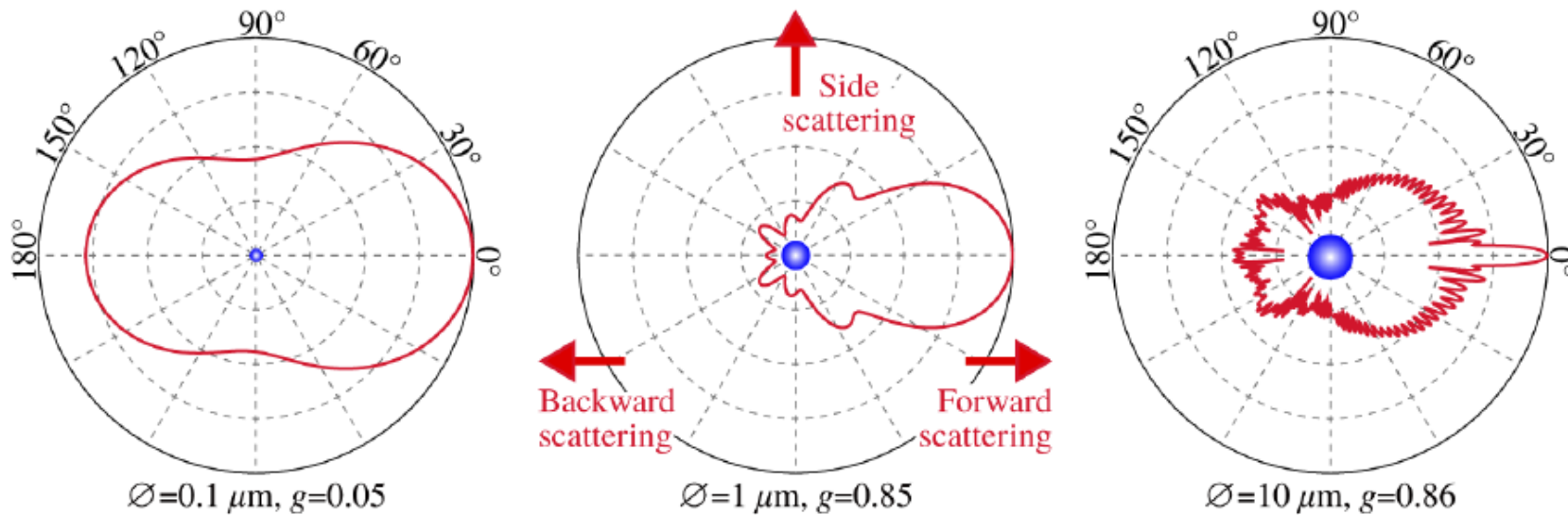
$$2\pi \int_0^{\pi} f(\theta) \sin(\theta) d\theta = 1$$

- w procesach rozproszeniowych dość często bardzo istotnymi kierunkami rozproszenia są:
 - kierunek do przodu (**forward scattering**) - bez zmiany kierunku
 - kierunek do tyłu (**backward scattering**) - odbicie
- aby określić ilość fotonów rozpraszanych do przodu (forward) wprowadza się **współczynnik anizotropii**

$$g = 2\pi \int_0^\pi f(\theta) \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta, \quad g \in [-1, 1]$$

interpretacja jest prosta:

- $g=0$ - ośrodek jest izotropowy, rozpraszanie do tyłu i do przodu są równie częste
- $g \sim 1$ - ośrodek silnie anizotropowy z preferowanym kierunkiem do przodu po rozproszeniu
- $g \sim -1$ - ośrodek silnie anizotropowy z preferowanym kierunkiem do tyłu po rozproszeniu



(Rysunek skopiowany z J. Jonsson, E. Berrocal, „Multi scattering software...”)
 Wartość potencjału rozpraszającego dla długości fali $\lambda = 600 \text{ nm}$ oraz trzech rozmiarów cząsteczek rozpraszających ($100 \mu\text{m}$, $1 \mu\text{m}$, $10 \mu\text{m}$)

- w praktyce zamiast korzystać ze skomplikowanej postaci potencjału rozpraszającego, zastępuje się go **przybliżeniem Henyey'a-Greenstein'a**

$$f(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{[1 + g^2 - 2g \cos(\theta)]^{3/2}}$$

- aby określić losowy kierunek podczas rozpraszania, wykorzystujemy dystrybuantę rozkładu

$$2\pi \int_0^\pi f(\theta) \sin(\theta) d\theta = 1$$

$$2\pi \int_0^{\theta_1} f(\theta) \sin(\theta) d\theta = U_1, \quad U_1 \sim U(0, 1)$$

$$\cos(\theta_1) = \frac{1 + g^2 - \left(\frac{1-g^2}{1-g+2gU_1}\right)^2}{2g}$$

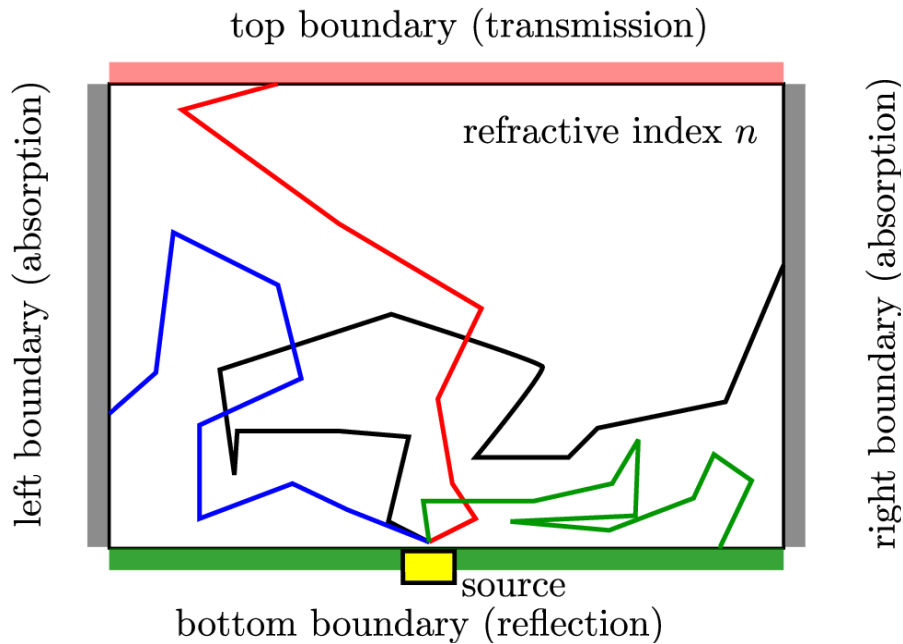
uwaga: podstawiono
 $1 - U_1 \leftarrow U_1$

$$\varphi = 2\pi \cdot U_2, \quad U_2 \sim U(0, 1)$$

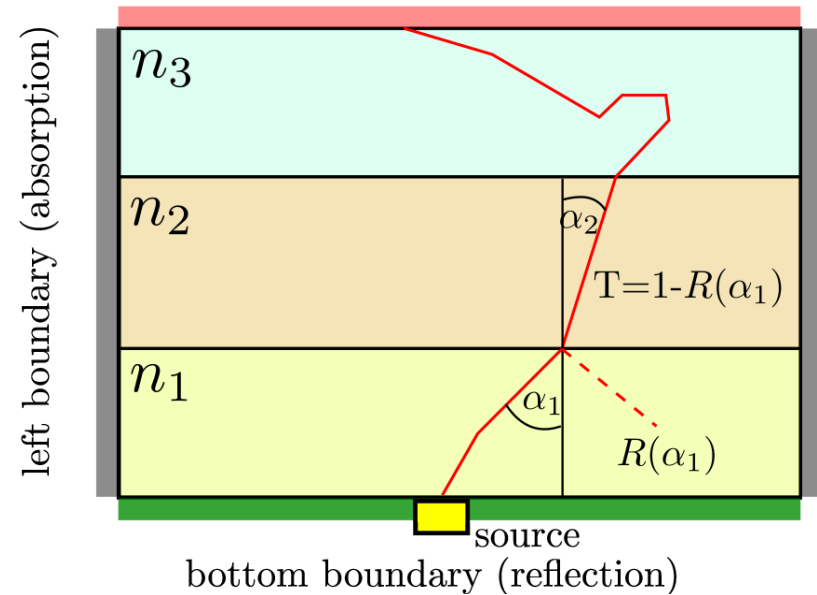
- kąty θ_1 oraz φ będą określały nowy kierunek fotonu po rozproszeniu

Algorytm transportu fotonów w ośrodku rozpraszającym (wielowarstwowym)

Naszym celem jest wykonanie symulacji MC transportu fotonów w układzie niejednorodnym. Taka symulacja jest dość złożona ponieważ wymaga uwzględnienia wielu typów oddziaływań, z tego powodu algorytm będzie przedstawiony w postaci opisu jego poszczególne elementy niezależnie od pozostałych.



- transport w ośrodku jednorodnym



- transport w ośrodku niejednorodnym, w układzie wielowarstwowym zmiana współczynnika załamania będzie dodatkowym czynnikiem rozpraszającym

- źródło fotonów – generowanie wiązki pierwotnej

każda symulowana wiązka rozpoczyna swój żywot w obszarze źródłowym, ma zatem określone parametry

- położenie
- kierunek
- rozkład przestrzenny

- kierunek określamy przez podanie wektora kierunkowego

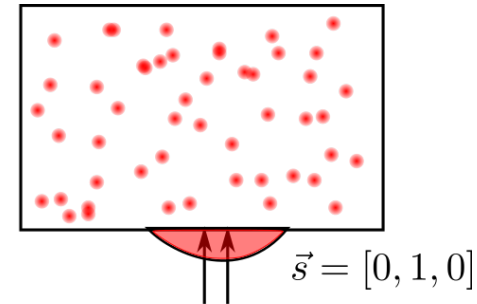
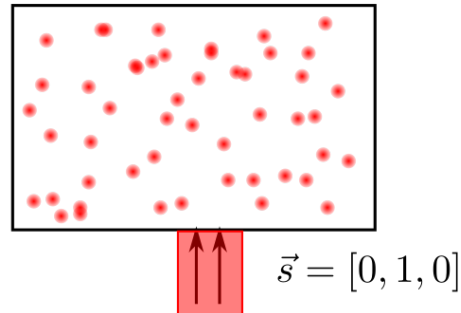
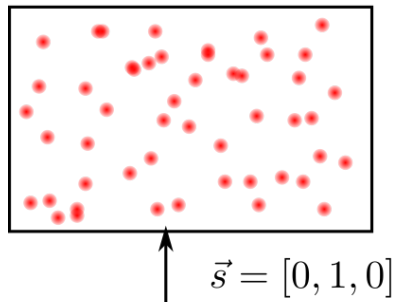
$$\vec{s} = [s_x, s_y, s_z], \quad |\vec{s}| = 1$$

- położenie na starcie określa wektor wodzący wiązki

$$\vec{r} = [x, y, z]$$

Możliwe realizacje wiązki startowej:

- rozkład punktowy – wiązka silnie skolimowana
- rozkład skończony – jednorodny
- rozkład skończony - niejednorodny



- swobodny lot fotonu**

Mając wybrany kierunek wiązki wyznaczamy w sposób losowy odległość do następnego aktu rozproszenia

$$\mu = \mu_a + \mu_s$$

gęstość prawdopodobieństwa, że na odcinku $[0,x]$ nie dochodzi do rozproszenia opisuje fgp

$$p(r) = \frac{dF}{dr} = \mu \exp(-\mu r)$$

odwracamy dystrybuantę

$$F(r) = \int_0^r p(r') dr' = U_1, \quad U_1 \sim U(0, 1)$$

losowa odległość do następnego miejsca rozproszenia

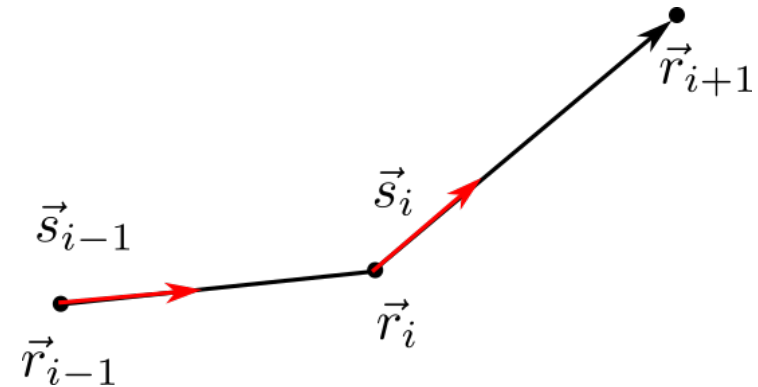
$$r = -\frac{\ln U_1}{\mu}$$

aktualne położenie wiązki w i-tym kroku

$$\vec{r}_i = [x_i, y_i, z_i]$$

określamy wektor przemieszczenia

$$\Delta \vec{r} = r \cdot \vec{s}_i$$



i położenie kolejnego punktu w którym dojdzie do rozproszenia

$$\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \Delta \vec{r} = [x_i + r \cdot s_x, y_i + r \cdot s_y, z_i + r \cdot s_z]$$

- absorpcja fotonów – depozycja energii**

Prowadząc symulacje pojedynczych fotonów, musimy się liczyć z tym że w przypadku absorpcji, foton znika. Aby uzyskać statystycznie poprawny opis oddziaływań w całym modelowanym obszarze musielibyśmy wykonać obliczenia dla olbrzymiej liczby fotonów. Wydajność metody MC byłaby niska.

W celu zwiększenia wydajności, zamiast pojedynczego fotonu symulujemy propagację całej wiązki fotonowej. Gdy dochodzi do aktu rozproszenia i absorpcji, tylko część fotonów jest tracona, pozostała część zmienia kierunek i porusza się dalej.

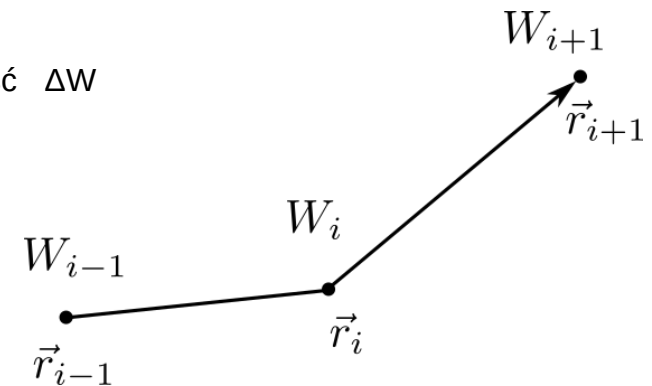
Nie określamy liczby fotonów w pojedynczej wiązce (może to być odpowiednik np. 10^6) zamiast tego używamy współczynnika wagowego W

$$W \in [0, 1]$$

podczas aktu rozproszenia dochodzi do częściowej absorpcji wiązki, której wartość ΔW określamy na podstawie relacji współczynników absorpcji i rozpraszania.

$$\Delta W = \frac{\mu_a}{\mu_a + \mu_s} W_{i-1}$$

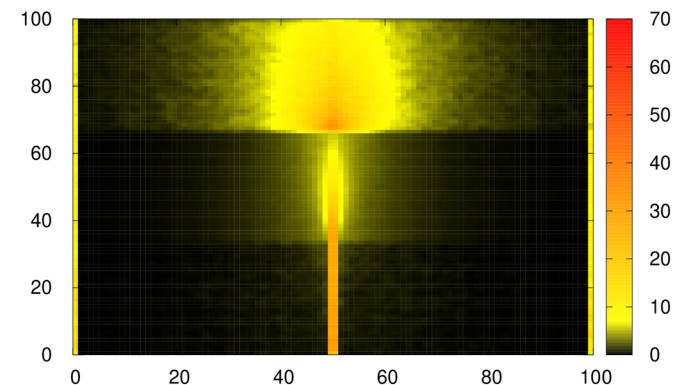
$$W_i = W_{i-1} - \Delta W = \frac{\mu_s}{\mu_s + \mu_a} W_{i-1} > 0$$



Utrata części wagi oznacza depozycję energii w danym punkcie – informacje o gęstości zdeponowanej energii zachowujemy, np. w tablicy rejestrującej przestrzenny rozkład absorpcji (A)

$$A(\vec{r}) \leftarrow A(\vec{r}) + \frac{\Delta W}{V}$$

V - objętość



Z postaci wzoru określającego wagę widać, że każdy akt rozproszenia będzie ją pomniejszał ale nie kasuje. To mogłoby doprowadzić do sytuacji, w której symulowalibyśmy wiązkę o ekstremalnie małym natężeniu np. $W=10^{-4}$, której wkład do końcowego rozwiązania (rozkład przestrzenny zaabsorbowanej energii) byłby zaniedbywalny.

Aby zwiększyć wydajność i ograniczyć takie przypadki stosuje się **metodę ruletki**

- metoda ruletki – wydajność + zasada zachowania energii**

- ustalamy minimalną akceptowalną wartość wagi np. $W_{\min}=10^{-3}$ oraz prawdopodobieństwo przeżycia wiązki np. $p_{\min}=0.1$
- sprawdzamy warunek: $W_i < W_{\min}$?
- jeśli warunek jest spełniony to losujemy liczbę $U_1 \sim U(0,1)$
- jeśli $U_1 < p_{\min}$ to wzmacniamy wiązkę i propagujemy ją dalej

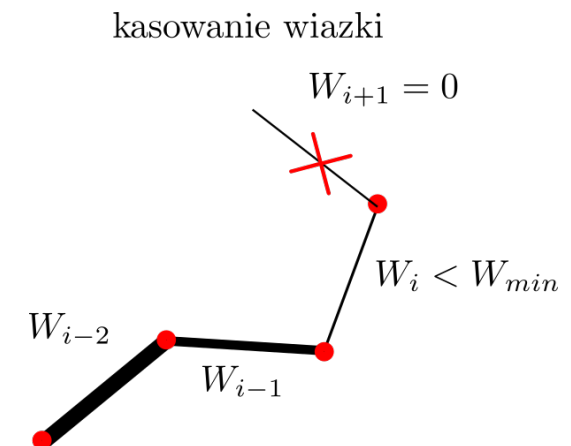
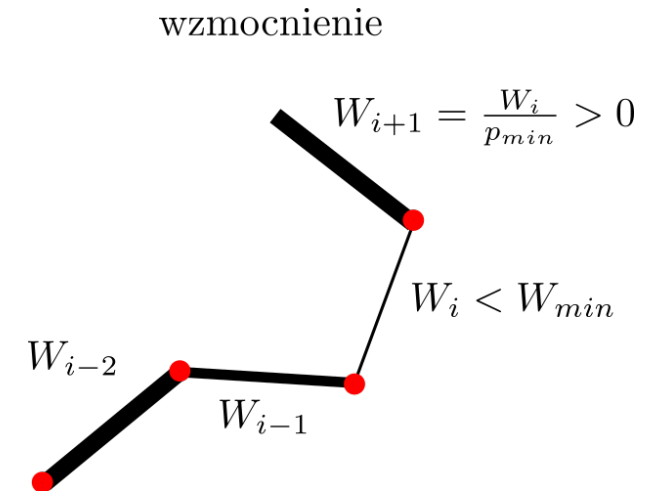
$$W_i \leftarrow W_i \cdot \frac{1}{p_{\min}}$$

- jeśli $U_1 > p_{\min}$ to wiązkę kasujemy

$$W_i = 0$$

Dla dużej liczby wygenerowanych wiązek, metoda ruletki spełnia zasadę zachowania energii:

- wagi które kasujemy (energia) odzyskujemy w pozostałej części wiązek, które przeżyły i zostały wzmacnione



- rozpraszanie fotonów – zmiana kierunku wiązki

Każdy akt rozproszenia w danym ośrodku (poza brzegiem) powoduje zmianę pierwotnego kierunku wiązki. Realizujemy ją przy pomocy funkcji Henyeya-Greensteina, która zawiera informację o współczynniku anizotropii g ośrodka

$$\cos(\theta_1) = \begin{cases} \frac{1+g^2 - \left(\frac{1-g^2}{1-g+2gU_1}\right)^2}{2g} & \iff g \neq 0 \\ 2 \cdot U_1 - 1 & \iff g = 0 \end{cases} \quad U_1 \sim U(0, 1)$$

$$\varphi = 2\pi \cdot U_2, \quad U_2 \sim U(0, 1)$$

- co zmienia wektor kierunkowy (warunek $|s_z| > 0$):

$$s_x^{new} = \frac{\sin \theta (s_x s_z \cos \varphi - s_y \sin \varphi)}{\sqrt{1 - s_z^2} + s_x \cos \theta}$$

$$s_y^{new} = \frac{\sin \theta (s_y s_z \cos \varphi + s_x \sin \varphi)}{\sqrt{1 - s_z^2} + s_y \cos \theta}$$

$$s_z^{new} = -\sin \theta \cos \varphi \sqrt{1 - s_z^2} + s_z \cos \theta$$

- dla wektora skierowanego wzdłuż osi z

$$s_x^{new} = \sin \theta \cos \varphi$$

$$s_y^{new} = \sin \theta \sin \varphi$$

$$s_z^{new} = \text{sign}(s_z) \cos \theta$$

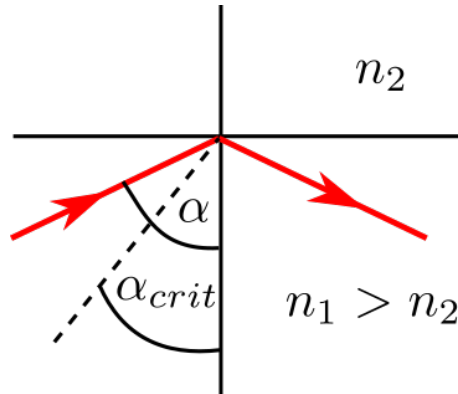
- przejście wiązki przez granicę między ośrodkami o różnym współczynniku załamania**

Foton przechodząc przez granicę między ośrodkami o różnych współczynnikach załamania n_1 i n_2 może

- całkowicie się odbić od interfejsu (z prawdopodobieństwem $p=1$), gdy: $n_1 > n_2$ oraz kąt padania jest większy od kąta krytycznego
- przejść do drugiego ośrodka z prawdopodobieństwem $0 < p_T < 1$
- odbić się od interfejsu z prawdopodobieństwem $0 < p_R < 1$

$$p_T + p_R = 1$$

- całkowite wewnętrzne odbicie**



prawo Snella

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha_{crit} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

$\alpha \geq \alpha_{crit}$ - całkowite wewnętrzne odbicie

wektor kierunkowy zawiera informację o kącie padania na płaszczyznę x-y (jeśli tak są ustawione warstwy)

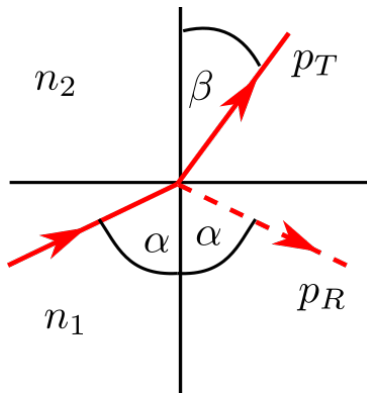
$$\vec{s} = [s_x, s_y, s_z] \rightarrow s_z = \cos \alpha \rightarrow \alpha = \arccos |s_z|$$

• moduł bo $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

po całkowitym odbiciu wystarczy zmienić kierunek z-owy

$$\vec{s}^{new} = [s_x, s_y, -s_z]$$

- częściowa transmisja i odbicie na interfejsie dwóch ośrodków



Wiązka padająca na interfejs może się też częściowo odbić, współczynnik odbicia określa wzór Fresnela (dla wiązki niespolaryzowanej)

$$p_R = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} + \frac{\tan^2(\alpha - \beta)}{\tan^2(\alpha + \beta)} \right]$$

$$p_T = 1 - p_R$$

O tym czy wiązka przejdzie przez interfejs czy zostanie odbita decydujemy w sposób losowy

$$U_1 \sim U(0, 1) \rightarrow \begin{cases} U_1 \leq p_R & \Rightarrow \text{odbicie} \\ U_1 > p_R & \Rightarrow \text{przejście} \end{cases}$$

odbicie

$$\vec{s}^{new} = [s_x, s_y, -s_z]$$

- tylko zmiana znaku

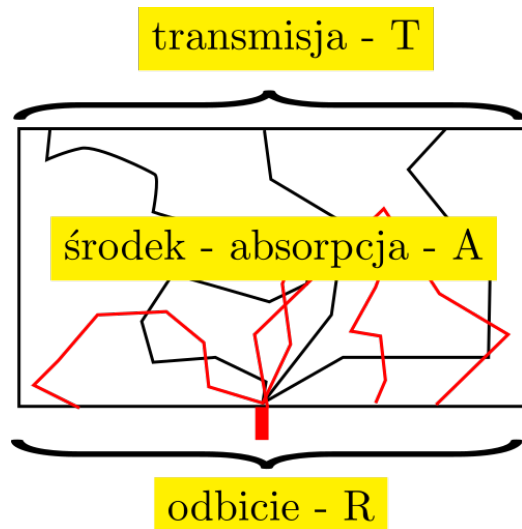
przejście

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{1 - s_z^2}$$

$$s_x^{new} = s_x \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad s_y^{new} = s_y \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad s_z^{new} = \text{sign}(s_z) \cos \beta$$

- znak ten sam, ale zmieniamy kąt

- globalne współczynniki: transmisji, odbicia, absorpcji (T,R,A)



w geometrii jak na rysunku

- wiązki docierające do górnego brzegu są kasowane, a ich wagi dają wkład do **współczynnika transmisji T**
- wiązki zawrócone do dolnego brzegu, gdzie zlokalizowane jest źródło, są kasowane (jeśli przechodzą) lub odbijane (interfejs). Wagi wiązek kasowanych dają wkład do **dyfuzyjnego współczynnika odbicia R**
- wagi zaabsorbowane wewnątrz układu dają wkład do **współczynnika absorpcji A**

absorpcja części wagi m-tej wiązki w i-tym kroku

$$z = z_{max} \quad T(x, y) \leftarrow T(x, y) + \frac{\Delta W_{m,i}(x, y, z_{max})}{S}$$

S – powierzchnia próbki
V - objętość próbki

$$z = z_{min} \quad R(x, y) \leftarrow R(x, y) + \frac{\Delta W_{m,i}(x, y, z_{min})}{S}$$

$$z \in (z_{min}, z_{max}) \quad A(x, y, z) \leftarrow A(x, y, z) + \frac{\Delta W_{m,i}(x, y, z)}{V}$$

Zasada zachowania energii wymusza spełnienie warunku normalizacji przez te współczynniki (uśrednienie po N wiązkach)

$$\frac{1}{N} \left(\int_V A dV + \int_S R dS + \int_S T dS \right) = 1$$

- współczynniki A, R i T wyrażają prawdopodobieństwa absorpcji na jednostkę objętości i powierzchni w odpowiednich obszarach układu.

$$A [cm^{-3}] \quad R [cm^{-2}] \quad T [cm^{-2}]$$

Znając parametry źródła

$P[W]$ - moc źródła

$Q[W]$ - całkowita energia dostarczona ze źródła

możemy określić **gęstość mocy (S)** oraz **gęstość energii radiacyjnej (Q)** deponowanych w dowolnym punkcie układu

$$S = A \cdot P \quad \left[\frac{W}{cm^3} \right] \quad \text{- szybkość deponowania energii}$$

$$E = A \cdot Q \quad \left[\frac{J}{cm^3} \right] \quad \text{- ilość deponowanej energii (całkowitej)}$$

Podobnie, korzystając z T, możemy określić **strumień mocy (ψ_P)** oraz **strumień energii (ψ_E)** pojawiającej się na wyjściu z układu

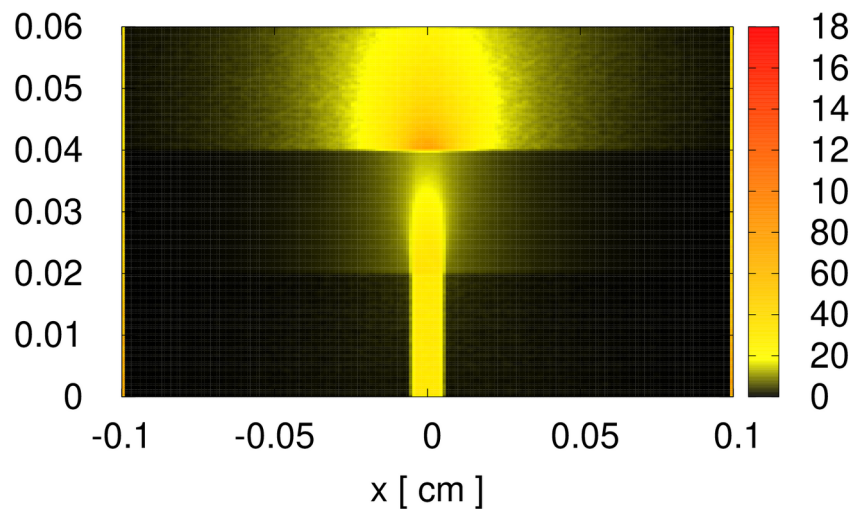
$$\psi_P = T \cdot P \quad \left[\frac{W}{cm^2} \right] \quad \psi_E = T \cdot Q \quad \left[\frac{J}{cm^2} \right]$$

Przykład: transport fotonów w 2D

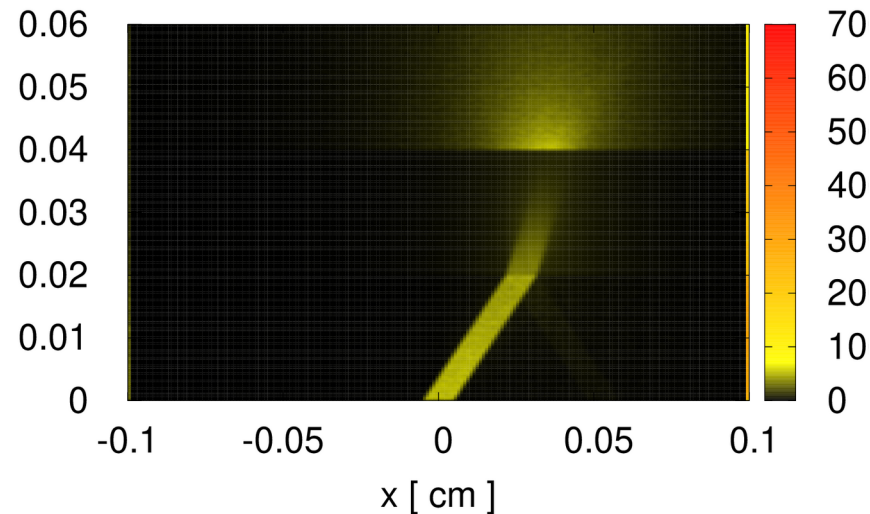
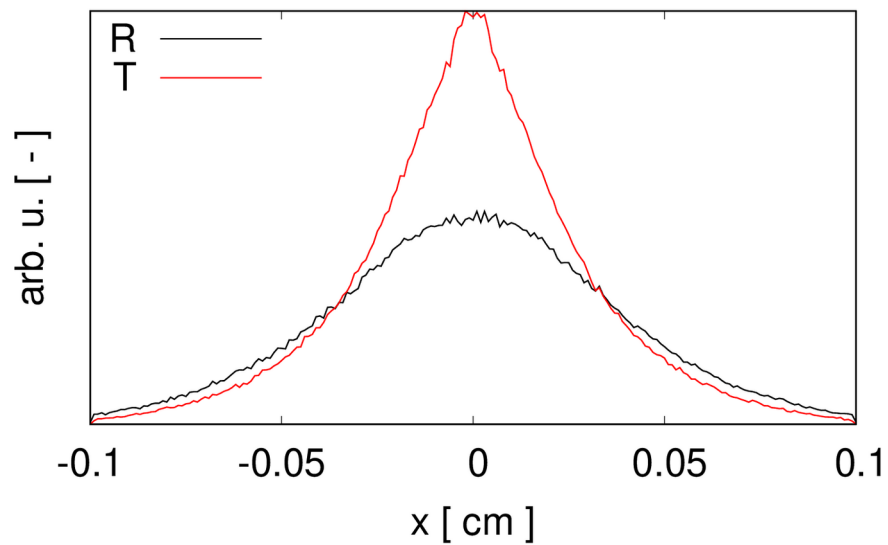
$$\Delta x_{source} = 0.01$$

$$N = 10^6$$

m	$\mu_a [1/cm]$	$\mu_s [1/cm]$	$d [cm]$	$g [-]$	$n [-]$
1	1	10	0.02	0.75	1.3
2	1	190	0.02	0.075	1.0
3	10	0.02	0.95	1.0	



$[s_x, s_y] = [0.0, 1.0]$



$[s_x, s_y] = [0.8, 0.6]$

