# Rozwiązanie równania Poissona przy użyciu MES 2D z funkcjami kształtu Hermite'a

Tomasz Chwiej, Alina Mreńca-Kolasińska

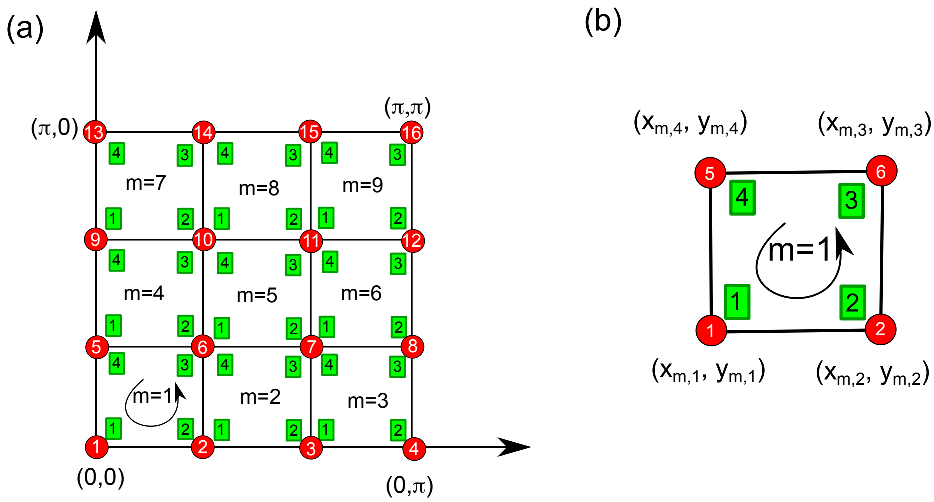
5 listopada 2018

## 1 Wstęp

Chcemy rozwiązać równanie Poissona w 2D ($\nabla^2 u(x,y) = -\rho(x,y)$)

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -sin(2y) \cdot sin^2(x) \tag{1}$$

w przedziale $x, y \in [0,\pi]$ dla warunku początkowego $u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,0) = u(x,\pi) = 0$. Rozwiązanie znajdziemy stosując MES 2D, w której: a) obszar $[0,\pi] \times [0,\pi]$ podzielimy na elementy kwadratowe oraz b) wykorzystamy funkcje kształtu Hermite'a (zapewniając ciągłość pochodnych w węzłach). Przy takich założeniach,




Rysunek 1: (Color online) a) Siatka z kwadratowymi elementami ($m = 1, 2, \ldots$), czerwone kropki - węzły, liczby w kolorze białym - indeksy globalne węzłów, indeksy w zielonych ramkach to numeracja lokalna węzłów w pojedynczym elemencie. b) Pojedynczy element z zaznaczonymi współrzędnymi jego 4 wierzchołków/węzłów.

najbardziej ogólna postać rozwiązania jest następująca

$$u(x,y) \approx \sum_{p=1}^{N_{max}} c_p v_p(x,y) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{4} \sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_2=0}^{1} c_{m,l,i_1,i_2} \phi_{\alpha}^{i_1}(\xi_1(x)) \phi_{\beta}^{i_2}(\xi_2(y)) \tag{2}$$

gdzie: m-indeks elementu, l-numer wierzchołka w elemencie, $\xi_1$ i $\xi_2$ to zmienne w przestrzeni referencyjnej. Stosujemy funkcje kształtu Hermite'a

$$\phi_1^0(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \tag{3}$$

$$\phi_2^0(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \tag{4}$$

$$\phi_1^1(\xi) = (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)/4, \quad (J_m = 1) \tag{5}$$

$$\phi_2^1(\xi) = (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)/4, \quad (J_m = 1) \tag{6}$$

Dla węzłów ponumerowanych lokalnie jak na rysunku [1(b)] przyjmujemy oznaczenia par $(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} \text{węzeł } l = 1\text{:} \quad (\alpha, \beta) &= (1, 1) &(7)\\ \text{węzeł } l = 2\text{:} \quad (\alpha, \beta) &= (2, 1) &(8)\\ \text{węzeł } l = 3\text{:} \quad (\alpha, \beta) &= (2, 2) &(9)\\ \text{węzeł } l = 4\text{:} \quad (\alpha, \beta) &= (1, 2) &(10)\end{aligned}$$

Dysponując bazą oraz siatką węzłów można równanie Poissona zapisać w postaci algebraicznej:

$$Sc = F \tag{11}$$

gdzie: S to macierz sztywności, c - to wektor rozwiązań, F - to wektor obciążeń. Elementy macierzy sztywności i wektora obciążeń liczymy według wzorów:

$$S_{p,q} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{l_1=1}^{4} \sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_2=0}^{1} \sum_{l_2=1}^{4} \sum_{j_1=0}^{1} \sum_{j_2=0}^{1} \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 \, \phi_{\alpha_1}^{i_1}(\xi_1) \phi_{\beta_1}^{i_2}(\xi_2) \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) \phi_{\alpha_2}^{j_1}(\xi_1) \phi_{\beta_2}^{j_2}(\xi_2) \tag{12}$$

$$F_p = \sum_{m=1}^{M} \sum_{l_1=1}^{4} \sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_2=0}^{1} \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 \, \phi_{\alpha_1}^{i_1}(\xi_1) \phi_{\beta_1}^{i_2}(\xi_2) \rho \left( x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2) \right) \cdot J_m \cdot (-1) \tag{13}$$

gdzie: $(\alpha_1, \beta_1)$ oraz $(\alpha_2, \beta_2)$ określamy na podstawie wzorów (7-10) dla aktualnych wartości $l_1$ i $l_2$. Jakobian liczymy znając położenia węzłów w elemencie

$$J_m = (x_{m,2} - x_{m,1}) \cdot (y_{m,4} - y_{m,1})/4 \tag{14}$$

A zależności $x(\xi_1, \xi_2)$ oraz $y(\xi_1, \xi_2)$ są następujące:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{4} x_{m,i} \cdot w_i(\xi_1, \xi_2) &(15)\\ y &= \sum_{i=1}^{4} y_{m,i} \cdot w_i(\xi_1, \xi_2) &(16)\\ w_1(\xi_1, \xi_2) &= (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)/4 &(17)\\ w_2(\xi_1, \xi_2) &= (1 + \xi_1)(1 - \xi_2)/4 &(18)\\ w_3(\xi_1, \xi_2) &= (1 + \xi_1)(1 + \xi_2)/4 &(19)\\ w_4(\xi_1, \xi_2) &= (1 - \xi_1)(1 + \xi_2)/4 &(20)\end{aligned}$$

Indeksy $p$ i $q$ określamy według wzorów:

$$p = 4(n_{m,l_1} - 1) + (i_1 + 1) + 2 \cdot i_2 \tag{21}$$
$$q = 4(n_{m,l_2} - 1) + (j_1 + 1) + 2 \cdot j_2 \tag{22}$$

gdzie: $n_{m,l}$ przyporządkowuje l-temu węzłowi z m-tego elementu indeks globalny $n$ (tablica).

**Warunki brzegowe.**

Funkcje kształtu $\phi_1^0$ i $\phi_2^0$ nie spełniają warunku brzegowego (mają wartość 1 w węzłach brzegowych). Należałoby je więc usunąć z bazy, ale to jest dość pracochłonne. O wiele prościej jest je zostawić w bazie, ale wówczas należy zadabać by współczynniki $c_{m,l,i_1,i_2}$ stojące przy nich wyzerowały się. Dlatego po wypełnieniu macierzy S i wektora F, sprawdzamy które węzły leżą na brzegu tj. jeśli zachodzi jeden z poniższych warunków

$$x_{m,l} = 0 \quad \vee \quad x_{m,l} = \pi \quad \vee \quad y_{m,l} = 0 \quad \vee \quad y_{m,l} = \pi \tag{23}$$

oraz $p$ odpowiada $i_1 = 0 \vee i_2 = 0$, wówczas ustalamy $p$ i zerujemy $p$-ty wiersz i $p$-tą kolumnę w S oraz $p$-ty element w F

$$\begin{aligned} S_{p,j} &= S_{j,p} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N_{max} &(24)\\ F_p &= 0 &(25)\end{aligned}$$

po czym na diagonali S dajemy

$$S_{p,p} = 1 \tag{26}$$

Od teraz S jest symetryczna, jak powinno być dla operatora samosprzężonego.

## 2 Zadania do wykonania

1. Ustalamy początkową ilość węzłów w kierunkach x/y: $n_x = n_y = 3$. Długość elementu w x: $\Delta x = \pi/(n_x - 1)$, oraz w y: $\Delta y = \pi/(n_y - 1)$. Całkowita liczba elementów: $M = (n_x - 1) \cdot (n_y - 1)$.

2. Generujemy tablicę, w której dla każdego elementu zapisujemy położenia jego 4 węzłów lokalnych. Elementy indeksujemy w pętli

$$m = i + (j-1) \cdot (n_x - 1), \quad i = 1, 2, \ldots, n_x - 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n_y - 1 \tag{27}$$

i jednocześnie wyznaczamy położenia węzłów ($x_i = \Delta x \cdot (i-1)$, $y_j = \Delta y \cdot (j-1)$) oraz ich indeksy globalne ($n_{m,l}$)

$$(x_{m,1}, y_{m,1}) = (x_i, y_j), \quad n_{m,1} = i + (j-1) \cdot n_x \tag{28}$$
$$(x_{m,2}, y_{m,2}) = (x_{i+1}, y_j), \quad n_{m,2} = (i+1) + (j-1) \cdot n_x \tag{29}$$
$$(x_{m,3}, y_{m,3}) = (x_{i+1}, y_{j+1}), \quad n_{m,3} = (i+1) + (j+1-1) \cdot n_x \tag{30}$$
$$(x_{m,4}, y_{m,4}) = (x_i, y_{j+1}), \quad n_{m,4} = i + (j+1-1) \cdot n_x \tag{31}$$

Sprawdzić czy indeksacja lokalna i globalna węzłów jest zgodna z założeniami.

Położenia węzłów zapisać do pliku i zrobić rysunek siatki. (10pkt.)

3. Wyliczyć elementy macierzowe $S_{p,q}$ oraz wektora obciążeń $F_p$. Macierz ma wymiary $N_{max} \times N_{max}$, gdzie $N_{max} = 4 \cdot n_x \cdot n_y$ (4 funkcje bazowe na każdy węzeł siatki). Całki we wzorach (12) i (13) liczymy numerycznie stosując podwójną kwadraturę Gausa-Legendre'a - dwa wymiary. Przyjąć 20 węzłów kwadratury na jeden wymiar (2D będzie: $20 \times 20$).

4. Uwzględnić warunki brzegowe w macierzy S i w wektorze F. (macierz S powinna być teraz symetryczna)

5. Rozwiązać układ równań $Sc = F$.

6. Obliczyć całkę funkcjonalną (dla równania Poissona obowiązuje zasada Rayleigha-Ritza):

$$a_{num} = \sum_{i=1}^{N_{max}} \sum_{j=1}^{N_{max}} (-1) c_i c_j S_{i,j}/2 - (-1) \sum_{i=1}^{N_{max}} c_i F_i \tag{32}$$

i porównać z wynikiem dokładnym $a_{dok} = -0.1805396133$. To najszybszy sposób sprawdzenia wyniku, bez jego rysowania. Dla $n_x = n_y = 3$ mamy $a_{num,3} = -0.132544$. Uwaga: podczas rozwiązywania układu S i F mogą one być zmienone przez procedurę - trzeba zachować ich kopie i na nich liczyć całkę funkcjonalną. (60pkt.)

7. Powtórzyć obliczenia całki funkcjonalnej dla: $n_x = n_y = 5, 10, 15, 20$. Wyniki zapisać do pliku. (10pkt.)

8. Sporządzić wykres konturowy rozwiązania numerycznego dla $n_x = n_y = 3, 10$ oraz rozwiązania dokładnego. (20pkt.) Rozwiązanie dokładne:

$$u_{dok}(x,y) = \sin(2y) \left( \frac{1}{16} \frac{e^{2x}\left(e^{-2\pi} - 1\right)}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} - \frac{1}{16} \frac{e^{-2x}\left(-1 + e^{2\pi}\right)}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}\cos(2x) \right) \tag{33}$$

## 3 Uwagi

1. Rysowanie - sposób postępowania:

   - w pętli ustalamy: (x,y)
   - sprawdzamy w którym elemencie jesteśmy: m
   - sumujemy wkłady do rozwiązania od danego elementu [p wyznaczamy ze wzoru (21)]:

$$u_{num}(x,y) = \sum_{l=1}^{4} \sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_2=0}^{1} c_p \cdot \phi_{\alpha}^{i_1}\left(\xi_1(x)\right) \cdot \phi_{\beta}^{i_2}\left(\xi_2(y)\right) \tag{34}$$

gdzie:

$$\xi_1(x) = \left(x - \frac{x_{m,1} + x_{m,2}}{2}\right) \frac{2}{x_{m,2} - x_{m,1}} \tag{35}$$

$$\xi_2(y) = \left(y - \frac{y_{m,1} + y_{m,4}}{2}\right) \frac{2}{y_{m,4} - y_{m,1}} \tag{36}$$

2. Całkowanie - można wykorzystać procedury z poprzednich zajęć, trzeba tylko dodać drugą pętlę dla drugiego wymiaru i wygenerować dla niego współczynniki kwadratury i węzły (niezależnie od pierwszego wymiaru).