

Rozwiązywanie zwyczajnego równania różniczkowego z warunkami brzegowymi przy użyciu baz funkcyjnych - metody: kolokacji, najmniejszych kwadratów, Galerkina

Tomasz Chwiej

16 października 2017

1 Wstęp

Chcemy znaleźć rozwiązanie RRZ:

$$Lu = f \implies \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{du}{dx} = 2(1 - 3x + x^2 - \pi^2)e^{-x} \quad (1)$$

w przedziale $x \in [-\pi, \pi]$. Dla warunków brzegowych: $u(-\pi) = u(\pi) = 0$ jego rozwiązaniem (**dokładnym**) jest funkcja:

$$u_d(x) = (x - \pi)(x + \pi)e^{-x} \quad (2)$$

Jeśli zdefiniujemy pewną bazę funkcyjną $\{v_i\}$ to rozwiązanie (**numeryczne**) możemy wyrazić jako:

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x) \quad (3)$$

Niezależnie od tego jaką metodę zastosujemy: kolokacji, najmniejszych kwadratów czy Galerkina, rozwiązanie problemu sprowadza się zawsze do rozwiązania układu równań:

$$Ac = b \quad (4)$$

Elementy macierzy A ($a_{k,i}$) oraz wektora b liczymy następująco:

- w metodzie kolokacji

$$a_{k,i} = (Lv_i)(x_k) \quad (5)$$

$$b_k = f(x_k) \quad (6)$$

gdzie: x_k położenie k -tego węzła

- w metodzie najmniejszych kwadratów

$$a_{k,i} = (Lv_k, Lv_i) = \int_{-\pi}^{\pi} Lv_k \cdot Lv_i dx \quad (7)$$

$$b_k = (f, Lv_k) = \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot Lv_k dx \quad (8)$$

- w metodzie Galerkina

$$a_{k,i} = (v_k, Lv_i) = \int_{-\pi}^{\pi} v_k \cdot Lv_i dx \quad (9)$$

$$b_k = (f, v_k) = \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot v_k dx \quad (10)$$

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie dla każdej z powyższych metod można uzyskać wykorzystując ten sam algorytm, zmieniając tylko sposób wyznaczania elementów $a_{k,i}$ oraz b_k .

2 Zadania do wykonania

1. Definiujemy **bazę I** w postaci: $v_i(x) = \cos[(i - 1/2)x] \cdot e^{-x}$, $i = 1, 2, \dots, N$, która spełnia warunki brzegowe.
2. Rozwiązać równanie różniczkowe metodą kolokacji, dla $N = 6, 7, 8, 9, 10$, oraz węzłów rozłożonych zgodnie z wzorem $x_k = -\pi + k \cdot \Delta x$, gdzie: $\Delta x = 2\pi/(N + 1)$ oraz $k = 1, 2, \dots, N$. Na jednym rysunku narysować różnicę rozwiązania dokładnego i numerycznego $\Delta u(x) = u_d(x) - u_n(x)$ dla wszystkich wartości N . (50 pkt.)
3. Rozwiązać równanie różniczkowe metodą najmniejszych kwadratów, dla $N = 6, 7, 8, 9, 10$. Na jednym rysunku narysować różnicę rozwiązania dokładnego i numerycznego $\Delta u(x) = u_d(x) - u_n(x)$ dla wszystkich wartości N . (20 pkt.)
4. Rozwiązać równanie różniczkowe metodą Galerkina, dla $N = 6, 7, 8, 9, 10$. Na jednym rysunku narysować różnicę rozwiązania dokładnego i numerycznego $\Delta u(x) = u_d(x) - u_n(x)$ dla wszystkich wartości N . (20 pkt.)
5. Powtórzyć obliczenia dla trzech metod, korzystając z **bazy II**: $v_i(x) = (x - \pi)(x + \pi)x^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$ (10 pkt.)

3 Uwagi

1. Pochodne proszę liczyć stosując ilorazy różnicowe:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (11)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (12)$$

z krokiem $\Delta x = 0.001$

2. Całki proszę liczyć numerycznie stosując kwadraturę **Gaussa-Legendre'a**:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i \cdot g(x_i) \quad (13)$$

gdzie: x_i oraz w_i to położenia węzłów i współczynniki kwadratury, które można wygenerować przy użyciu procedur z Numerical Recipes lub GSL. W obliczeniach zastosować $n = 40$.

Przykład całkowania przy użyciu GSL-a w C:

```
#include <gsl/gsl_math.h>
#include <gsl/gsl_integration.h>
//całkowanie Lvk_Lvi
double Lvk_Lvi(int k,int i){
    double pi=4.*atan(1.0);
    double calka,a,b,xi,wi;
    double dx=0.0001;
    int j;
    size_t n=40;
    a=-pi;
    b=pi;
    gsl_integration_glfixed_table *tab= gsl_integration_glfixed_table_alloc(n);

    calka=0.;
    for(j=0;j<n;j++){
        gsl_integration_glfixed_point(a,b,j,&xi,&wi,tab);
        calka=calka+wi*Lvi(k,xi,dx)*Lvi(i,xi,dx);
    }
    gsl_integration_glfixed_table_free(tab);
    return calka;
}
```

3. Aby łatwiej porównać wyniki dla różnych baz, można wszystkie wykresy umieścić na jednym rysunku np. w Gnuplocie wykorzystując otoczenie **multiplot**:

```
set term postscript color enhanced solid
set size square
set size 1.,1.
```

```
set out 'wyniki.eps'
```

```
set multiplot layout 2,3 rowsfirst
```

```
set title 'baza 1-kolokacja'
plot 'zad1.dat' u 1:7 w l t 'N=6'
```

```
set title 'baza 1-least squares'
plot 'zad2.dat' u 1:7 w l t 'N=6'
```

```
set title 'baza 1-galerkin'
plot 'zad3.dat' u 1:7 w l t 'N=6'
```

```
set title 'baza 2-kolokacja'
plot 'zad1_2.dat' u 1:7 w l t 'N=6'
```

```
set title 'baza 2-least squares'
plot 'zad2_2.dat' u 1:7 w l t 'N=6'
```

```
set title 'baza 2-galerkin'
plot 'zad3_2.dat' u 1:7 w l t 'N=6'
```

```
unset multiplot
```