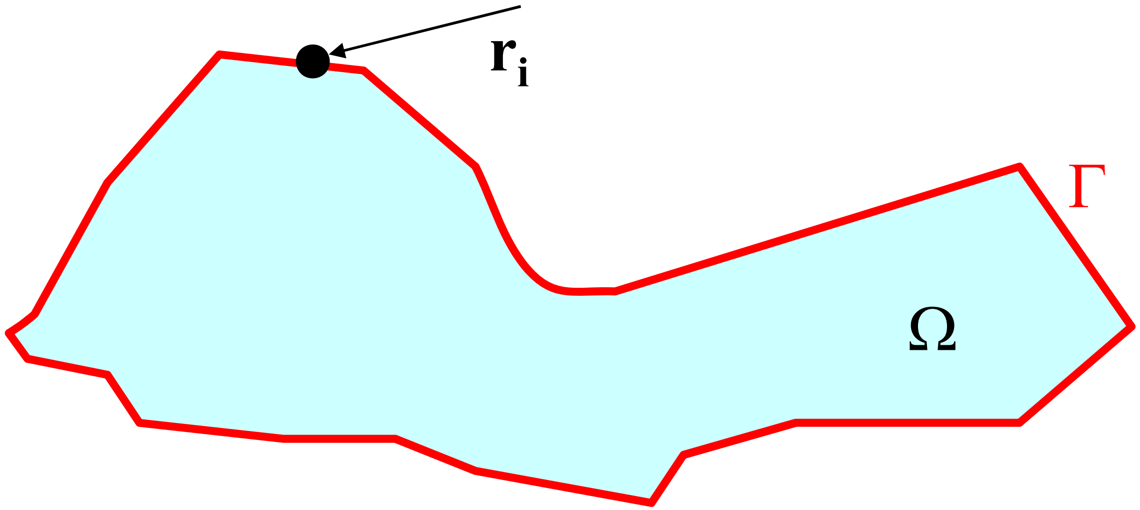
numeryczne rozwiązywanie równań całkowych



metoda elementów brzegowych: punktem wyjściowym było rozwiązanie równania całkowego na brzegu obszaru całkowania

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_\Gamma (\dot{u}q - \dot{q}u)\, d\Gamma + \int_\Omega \dot{u}\rho(x) d\Omega$$

równanie: wygenerowane z równania różniczkowego scałkowanego ze swobodną funkcją Greena

Lektury: Arfken, Mathematical Methods for Physicists, Andrzej Lenda, Wybrane Rozdziały MMF, Numerical Recipes

Typy równań całkowych w 1D:

Fredholma 1-go rodzaju

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

Fredholma 2-go rodzaju

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

niewiadoma

jądro (*kernel*)

jeśli f(x)=0
jednorodne

Volterry 1-go rodzaju

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt$$

Volterry 2-go rodzaju

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt$$

Równania całkowe: skąd się biorą ?

Często: równanie całkowe : z różniczkowego z wstawionym warunkiem brzegowym (początkowym)

Przykład 1: problem początkowy dla oscylatora harmonicznego:

$$y(t)'' = -y(t)$$

$$y(t=0) = 0$$

$$y'(t=0) = 1$$

całkujemy równanie po czasie od *t*=0 do chwili *a*

$$\int_0^a y''(t)dt = -\int_0^a y(t)dt$$

$$\int_0^a y''(t)dt = -\int_0^a y(t)dt$$

$$y'(t)|_{t=0}^{t=a} = -\int_0^a y(t)dt$$

$$y'(a) = \underline{y'(0)} - \int_0^a y(t)dt$$

warunki początkowe
włączane do równania
[równanie całkowe
= równanie różniczkowe
+ warunkami brzegowe
(początkowe)]

całkujmy jeszcze raz po *a* od 0 do *b*

$$\int_0^b y'(a)da = by'(0) - \int_0^b \int_0^a y(t)dtda$$

$$y(b) = by'(0) - \int_0^b \int_0^a y(t)dtda + \underline{y(0)}$$

$$y(b) = by'(0) - \int_0^b \int_0^a y(t)dtda + y(0)$$

nasze warunki początkowe:

$$y(b) = b - \int_0^b \int_0^a y(t)dtda$$

tożsamość: $\int_0^b \boxed{\int_0^a y(t)dt}da = \int_0^b (b-t)y(t)dt$

$$\int_0^b F(a)da$$

pochodna po b:

$$F(b) = \int_0^b y(t)dt$$

$$b\int_0^b y(t)dt - \int_0^b ty(t)dt$$

' po b

$$\int_0^b y(t)dt + by(b) - by(b)$$

dowód:
zróżniczkować
obustronnie

i sprawdzić,
że dla b=0
nie ma różnicy
w równaniu przed
różniczkowaniem

$$y(b) = b - \int_0^b \int_0^a y(t)\,dt\,da$$

$$\int_0^b \int_0^a y(t)\,dt\,da = \int_0^b (b-t)y(t)\,dt$$

$$y(b) = b - \int_0^b (b-t)y(t)\,dt$$

$b{:=}x$

$$y(x) = x - \int_0^x (x-t)y(t)\,dt$$

rozpoznajemy:
Volterry 2-go rodzaju,
niejednorodne

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\phi(t)\,dt$$

różniczkowe zagadnienie początkowe:
produkuje całkowe równanie Volterry

Przykład 2: problem **brzegowy** dla równania oscylatora
(normalne / własne drgania struny)

$$y(t)'' = -\omega^2 y(t)$$

$$y(t=0)=0$$

$$y(t=a)=0$$

t należy tutaj rozumieć jako położenie
== równanie własne dla struny

[uwaga, dla dowolnego *w* i dowolnego *a*
rozwiązanie wcale nie musi istnieć!] (w=1,a=2) np.

---

prawie te same wzory, dochodzimy do

$$y(b) = by'(0) - \omega^2 \int_0^b \int_0^a y(t)dtda + y(0)$$

korzystamy z y(0)=0, z tożsamości całkowej i przyjmujemy a=x, b=x

$$y(x) = xy'(0) - \omega^2 \int_0^x (x-t)y(t)dt \longrightarrow \boxed{y'(0) = ?}$$

$$y(x) = xy'(0) - \omega^2 \int_0^x (x-t)y(t)dt$$

y'(0)= ?

wstawiamy *x=a* i korzystamy z *y(a)=0*

$$y'(0) = \frac{\omega^2}{a} \int_0^a (a-t)y(t)dt$$

Wstawić, dostaniemy:

Fredholma drugiego rodzaju

$$y(x) = \omega^2 \int_0^a K(x,t)y(t)dt$$

z

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{a}(a-t) & \text{dla } t > x \\ \frac{t}{a}(a-x) & \text{dla } t < x \end{cases}$$

(funkcja Greena)

problem różniczkowy + warunki brzegowe = równanie Fredholma problem różniczkowy + warunki brzegowe = równanie Fredholma

problem różniczkowy + warunki początkowe = równanie Volterry

każde różniczkowe z warunkami daje się przekształcić do postaci całkowej
ale czasem w sposób bezpowrotny
(istnieją równania całkowe, których odpowiednik różniczkowy nie jest znany)

Numeryczne rozwiązywanie równania Fredholma drugiego rodzaju:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

metoda Nystroma:

$$\int_a^b y(t)dt = \sum_{j=1}^{N} w_j y(t_j)$$

kwadratura,
dla ciągłych funkcji podcałkowych (ciągłych *K*)
sprawdza się najlepiej metoda Gaussa.

$$\phi(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{j=1}^{N} w_j K(x_i, t_j)\phi(t_j)$$

$$\phi(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{j=1}^{N} w_j K(x_i, x_j)\phi(x_j)$$

$$\phi(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{j=1}^{N} w_j K(x_i, x_j) \phi(x_j)$$

w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{A\phi = f}$$

układ równań do rozwiązania

z:

$$A_{ij} = \delta_{i,j} - \lambda w_j K(x_i, x_j)$$

$$A_{ij} = \delta_{i,j} - \lambda w_j K(x_i, x_j)$$

$$A\phi = f$$

dla niejednorodnego równania Fredholma drugiego rodzaju

dla jednorodnego równania Fredholma drugiego rodzaju

$$y(t)'' = -\omega^2 y(t)$$

$$y(t=0) = 0$$

$$y(t = 2) = 0$$

analitycznie $\omega = (n\pi/2)$

$$y(x) = \omega^2 \int_0^a K(x,t) y(t) dt$$

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{2}(2-t) & \text{dla } t > x \\ \frac{t}{2}(2-x) & \text{dla } t < x \end{cases}$$

zgodnie z wcześniejszymi wzorami:

$$Ay = 0$$

takiego URL nie chcemy rozwiązywać:
macierz musi być osobliwa aby istniało rozwiązanie niezerowe

równanie jednorodne:

$\lambda=\omega^2$

$$A_{ij} = \delta_{i,j} - \lambda w_j K(x_i, x_j)$$

$$y(x) = \omega^2 \int_0^a K(x,t) y(t) dt$$

$$\boldsymbol{Ay=0}$$

$$\mathbf{1y} = \lambda \mathbf{By}$$

$$B_{ij} = w_j K(x_i, x_j)$$

$$\mathbf{By} = \sigma \mathbf{y}$$

$\sigma=1/\omega^2$

W problemie modelowym: jądro symetryczne, ale **B** symetryczna nie będzie bo wagi Gaussa do macierzy wprowadzane są w sposób niesymetryczny.

dla problemu modelowego dokładne wartości własne $\sigma=(2/n\pi)^2$

Wyniki (numerycznie rozwiązanie jednorodnego równania Fredholma drugiego rodzaju = przykład, drgania własne struny)

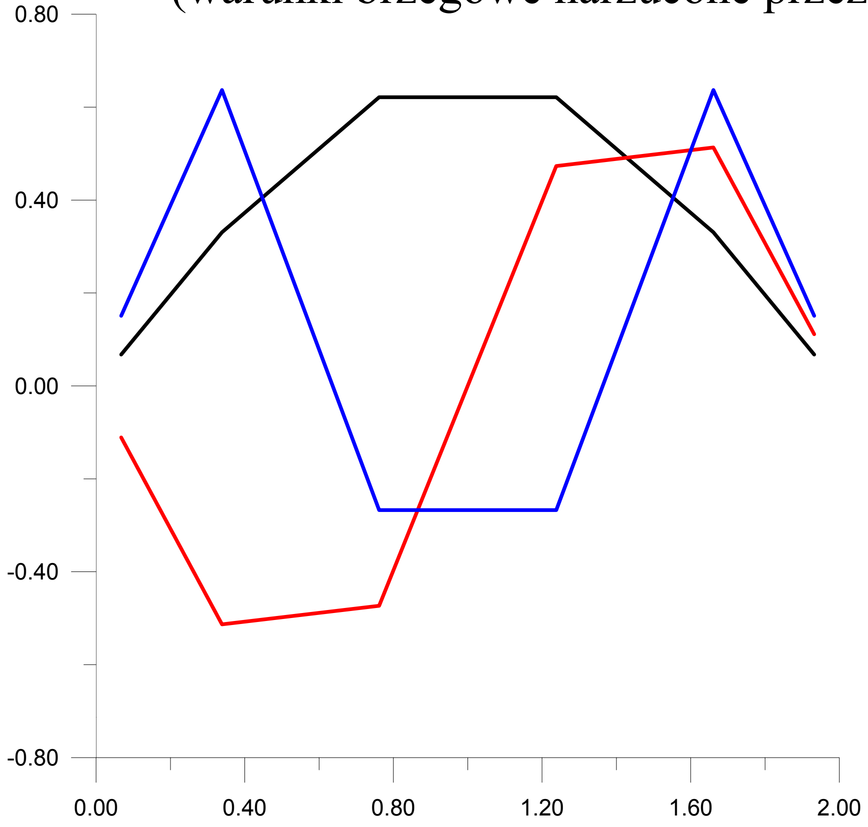
$$B_{ij} = w_j K(x_i, x_j)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \sigma \mathbf{y}$$

s [numer] $(2/n\pi)^2$

0.4225 0.4052
0.1173 0.1013
0.0584 0.0450

6 – punktowy Gauss:
(warunki brzegowe narzucone przez formę B)

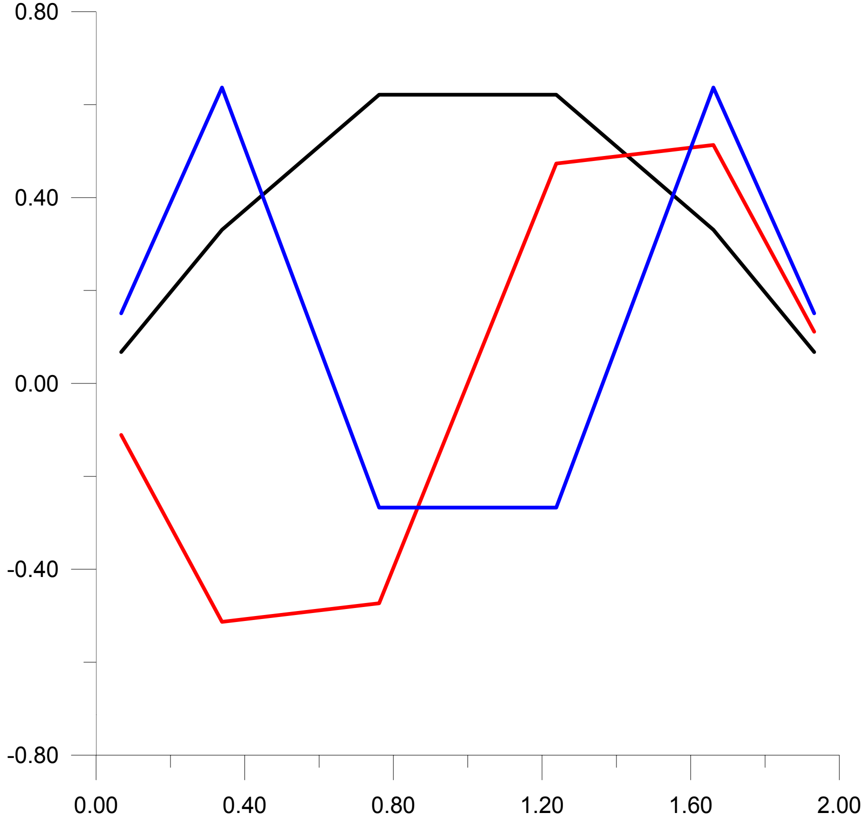


Wyniki (numerycznie rozwiązanie jednorodnego równania Fredholma drugiego rodzaju = przykład, drgania własne struny)

$$B_{ij} = w_j K(x_i, x_j)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \sigma \mathbf{y}$$

6 – punktowy Gauss:



s [numer]	$(2/n\pi)^2$
0.4225	0.4052
0.1173	0.1013
0.0584	0.0450

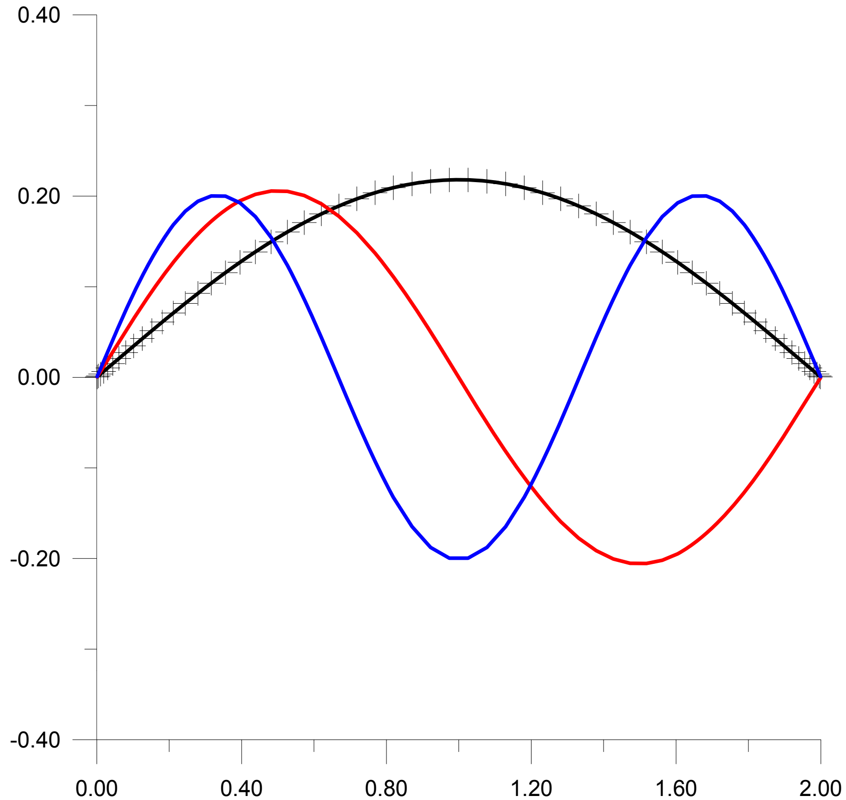
Wyniki (numerycznie rozwiązanie jednorodnego równania Fredholma drugiego rodzaju = przykład, drgania własne struny)

$$B_{ij} = w_j K(x_i, x_j)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \sigma \mathbf{y}$$

60 – punktowy Gauss:

s [numer]	$(2/n\pi)^2$
0.4054	0.4052
0.1015	0.1013
0.0451	0.0450



równanie Fredholma drugiego rodzaju jednorodne i niejednorodne

niejednorodne

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

$$\phi(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{j=1} w_j K(x_i, x_j)\phi(x_j)$$

tutaj lambda:
input

$$\boldsymbol{A\phi=f}$$

$$A_{ij} = \delta_{i,j} - \lambda w_j K(x_i, x_j)$$

---

jednorodne

$$\phi(x) = \cancel{f(x)} + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

tutaj lambda:
output
z równania własnego

$$B_{ij} = w_j K(x_i, x_j)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \sigma \mathbf{y}$$

Dla niejednorodnego:
jeśli wstawić λ jako jedną z wartości
własnych jednorodnego:
***A* osobliwa,**
Aϕ=f nie ma jednoznacznego rozwiązania

Alternatywa Fredholma

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt \qquad (1)$$

$$\phi(x) = \lambda_o \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt \qquad (2)$$

równanie (1) ma jednoznaczne rozwiązanie jeśli λ nie jest jedną z λ_0

dla numeryki: (1) zagrożone złym uwarunkowaniem
gdy λ bliskie jednej z λ_0

Dla niejednorodnego:
jeśli wstawić λ jako jedną z wartości
własnych jednorodnego:
***A* osobliwa,**
***Aϕ=f* nie ma jednoznacznego rozwiązania**

Równania Fredholma pierwszego rodzaju: (transformaty całkowe)

Laplace'a:

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \exp(-xt)\phi(t)dt$$

jądro eksponencjalne z rzeczywistym, urojonym argumentem

Fouriera

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixt)\phi(t)dt$$

Uwaga!: zazwyczaj bardzo trudne do rozwiązania numerycznego
stosuje się odwrotną transformatę Fouriera
lub szuka się w tablicach odwrotnej Laplace'a

Równanie Fredholma pierwszego rodzaju

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

spróbujmy podejść do problemu analogicznie do równań drugiego rodzaju:

$$f(x_i) = \sum_{j=1} w_j K(x_i, x_j)\phi(x_j)$$

$$\boldsymbol{A\phi=\mathbf{f}}$$

z

$$A_{ij} = w_j K(x_i, x_j)$$

Jeśli *K* ma odpowiednią formę, równanie może się udać rozwiązać.
ale zazwyczaj należy liczyć się z poważnymi kłopotami

Równanie Fredholma pierwszego rodzaju

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

spróbujmy analogicznie do równań drugiego rodzaju:

$$f(x_i) = \sum_{j=1} w_j K(x_i, x_j)\phi(x_j)$$

$\boldsymbol{A\phi=f}$ z $A_{ij} = w_j K(x_i, x_j)$

Weźmy skrajnie niemądry przykład, aby zilustrować trudność w rozwiązywaniu
Równań tego typu *K(x,t)*=1, *f* = *const*

$$f = \int_a^b \phi(t) \quad dt$$

Równanie Fredholma pierwszego rodzaju

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

spróbujmy analogicznie do równań drugiego rodzaju:

$$f(x_i) = \sum_{j=1} w_j K(x_i, x_j)\phi(x_j)$$

$\boldsymbol{A\phi}=\mathbf{f}$ z $A_{ij} = w_j K(x_i, x_j)$

Weźmy skrajnie niemądry przykład, aby zilustrować trudność w rozwiązywaniu
Równań tego typu $K(x,t)=1$, $f = const$

$$f = \int_a^b \phi(t) \quad dt$$

Problem jest taki: wiemy ile wynosi całka z funkcji.
Pytanie: jaka to funkcja ?
nieskończenie wiele rozwiązań.
Macierz A_{ij} = osobliwa.

problem źle postawiony (rozwiązanie nie jest jednoznaczne)

Równania Volterry

Volterry 1-go rodzaju

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt$$

Volterry 2-go rodzaju

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt$$

rozwiązujemy na siatce równomiernej, np. metodą trapezów

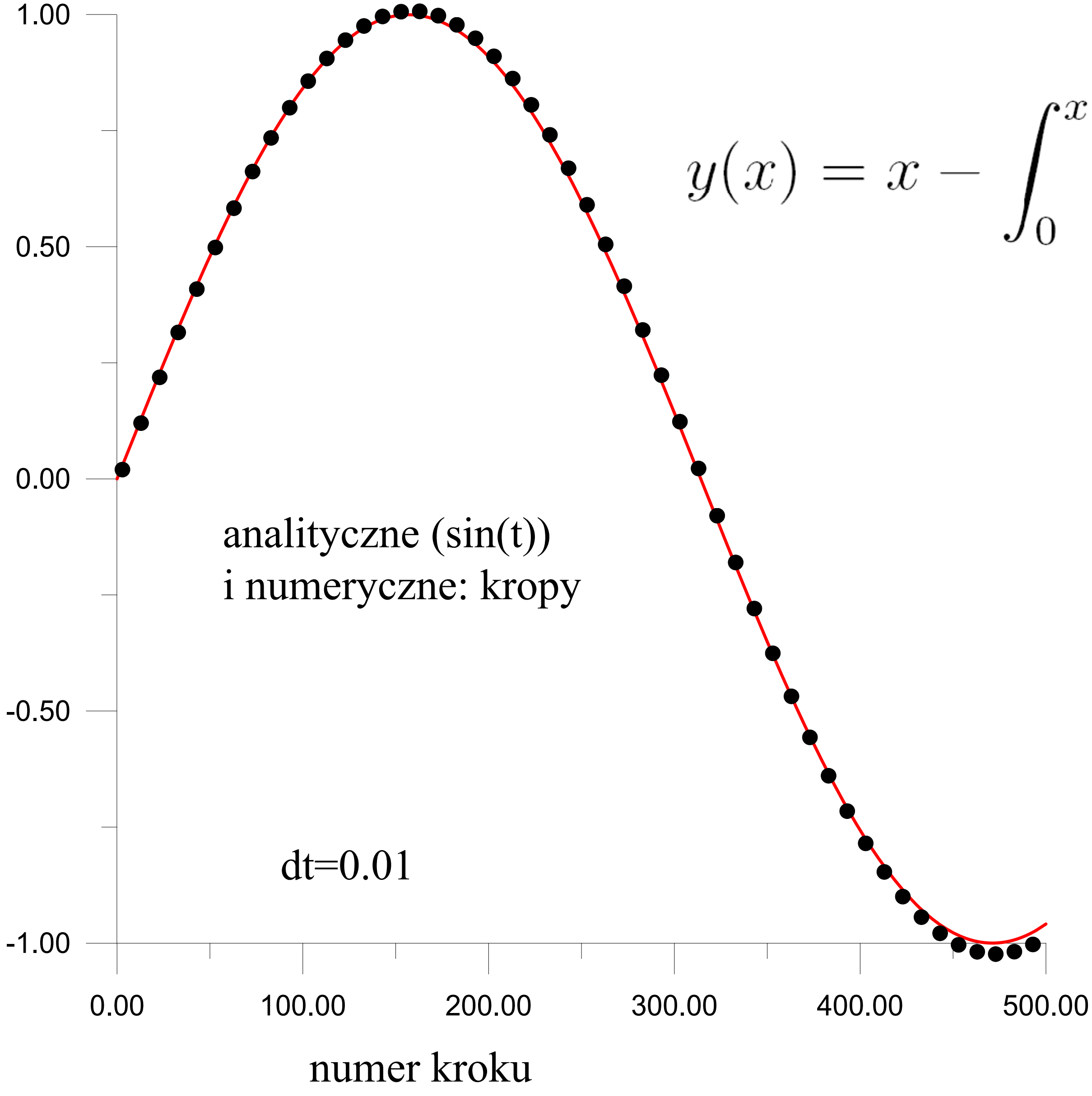
$x_n = a + n\Delta x$ $\qquad \phi_n = \phi(x_n)$

$$\phi_n = f_n + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} \Delta x K(x_n, t_j)\phi_j + \lambda \frac{\Delta x}{2} \left(K(x_n, t_0)\phi_0 + K(x_n, t_n)\phi_n\right)$$

$$\phi_n = \left(f_n + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} \Delta x K(x_n, t_j)\phi_j + \lambda \frac{\Delta x}{2} K(x_n, t_0)\phi_0 \right) / \left(1 - \lambda \frac{\Delta x}{2} K(x_n, t_n) \right)$$

prosty schemat iteracyjny, nawet układu równań nie trzeba rozwiązywać
dla 1-go rodzaju: zmienić znak *f, skreślić jedynkę w mianowniku*

Rachunek numeryczny dla Volterry drugiego typu ze wzorem trapezów



$$y(x) = x - \int_0^x (x-t)y(t)dt$$

Metoda numeryczne dla równań całkowych:
podsumowanie

Fredholma 1-go rodzaju

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

bywa bardzo trudne:
problem z klasy odwrotnych

Fredholma 2-go rodzaju

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

rekomendowana: metoda Nystroma
z kwadraturą Gaussa
produkuje układ równań (dla niejednorodnego)
lub równanie własne (dla jednorodnego)

Volterry 1-go rodzaju

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt$$

Volterry 2-go rodzaju

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt$$

łatwe, pokrewne problemom początkowym
rozwiązuje się kwadraturą o np. stałym kroku całkowania