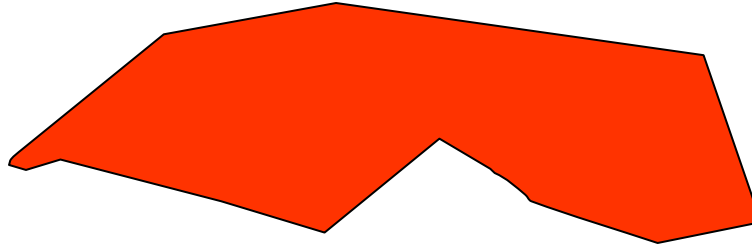


# Metoda elementów brzegowych

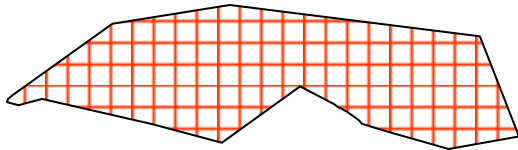


$$\nabla^2 u = -\rho$$

$Lu=f$   
plus warunki brzegowe

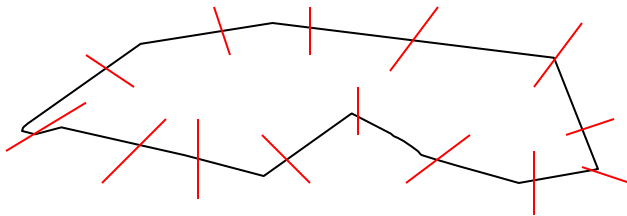
możliwe podejścia:

1) Metoda różnic skończonych

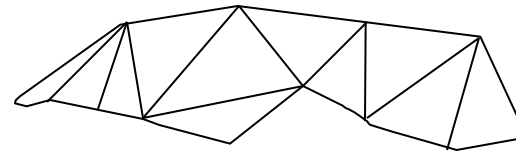


silna postać równania +  
ilorazy różnicowe

3) Metoda elementów brzegowych



2) Metoda elementów skończonych



obszar podzielony na elementy,  
w każdym z elementów rozwiązanie  $u$   
w postaci wielomianu interpolacyjnego

tylko brzeg dzielony na elementy  
w których zadajemy  $u$  a liczymy  $\delta u/\delta n$  (lub na odwrót)

**Formalizm ważonych reszt:  
(uniwersalny dla metod  
przybliżonych)**

$$Lu = f$$

$u =$  rozwiązanie dokładne

$$L\tilde{u} = f + \epsilon(\mathbf{r})$$



rozwiązanie przybliżone



jego błąd

błąd łatwo oszacować:  $L\tilde{u} - f = \epsilon$

chcielibyśmy  $\epsilon(\mathbf{r})=0$ , ale zadowolimy się:

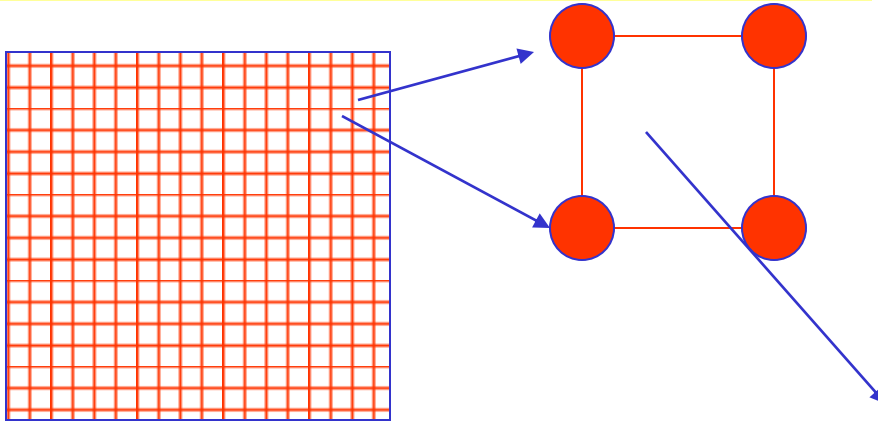
$$\int_{\Omega} w(L\tilde{u} - f)d\Omega = \int_{\Omega} w\epsilon d\Omega = 0 \quad w(r) = \text{fcja wagowa}$$

słaba forma równania różniczkowego

obustronnie mnożymy przez funkcję wagową,  
całkujemy obustronnie i żądamy znikania błędy  
w sensie „słabym” (błąd ortogonalny do funkcji wagowej )

# 1. Metoda różnic skończonych w formalizmie reszt ważonych ( $\pm$ odpowiedność dla słabej formy równania)

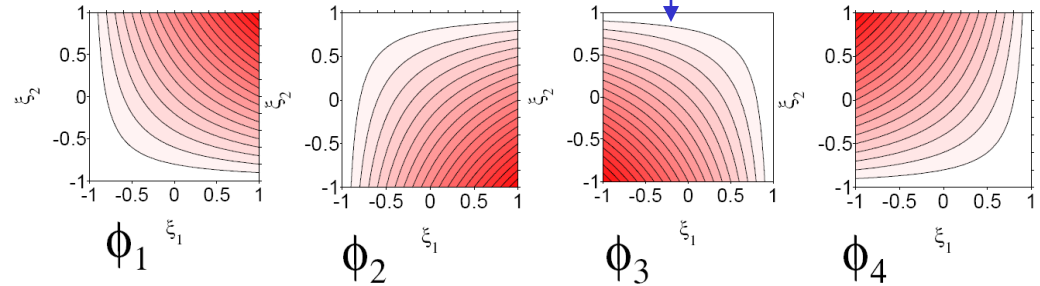
1) przestrzeń dzielimy na identyczne elementy,



2) w każdym elemencie rozwiązanie przybliżone rozwijamy w bazie funkcji kształtu (interpolacja Lagrange'a na węzłach narożnych)

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_k c_k \phi_k(x, y)$$

$$\int_{\Omega} w(L\tilde{u} - f)d\Omega = \int_{\Omega} w\epsilon d\Omega = 0$$



3. Funkcje wagowe: (tyle funkcji ile węzłów)  
każda waga: **delty Diraca** scentrowana w **jednym z węzłów**.  
(Błąd dopuszczamy tylko poza węzłami)

1,2,3+wartość główna pochodnej na granicy elementów = równania MRS

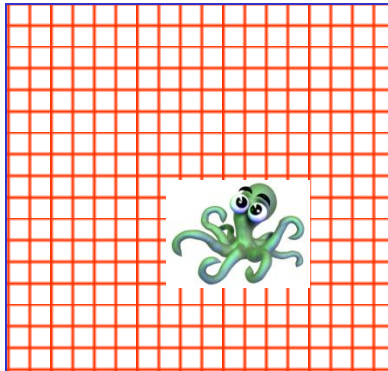
# Metoda różnic skończonych:

$$\nabla^2 u = -\rho$$

continuum opisane na dyskretnej siatce

$$\nabla^2 u = \frac{u(x+dx, y) + u(x-dx, y) - 2u(x, y)}{dx^2} + \frac{u(x, y+dy) + u(x, y-dy) - 2u(x, y)}{dy^2} + O(dx^2, dy^2)$$

dx



dy

metoda najprostsza w zastosowaniu (duży komfort jeśli rachunek pójdzie tą metodą), lecz:

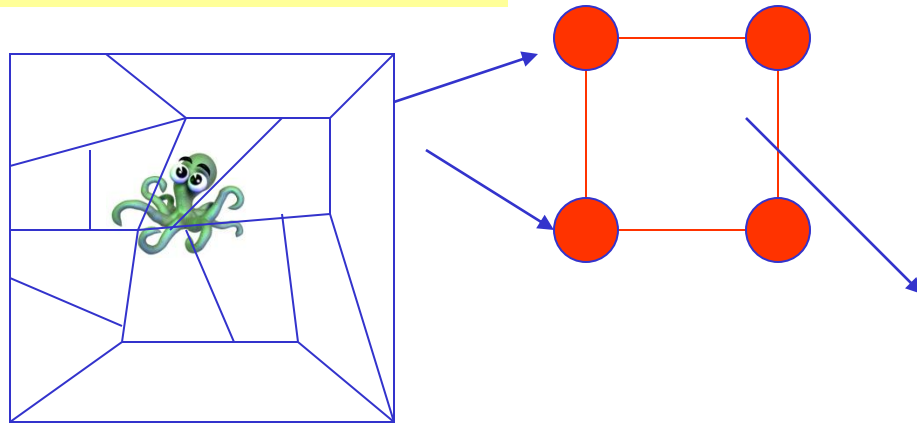
podaje rozwiązanie tylko w dyskretnych punktach

wolno zbieżna: wymaga wielkich siatek (często zbyt wielkich)

słabo sprawdza się lokalne zagęszczanie siatki (błąd ilorazu różnicowego skacze o jeden rząd przy nierównej siatce)

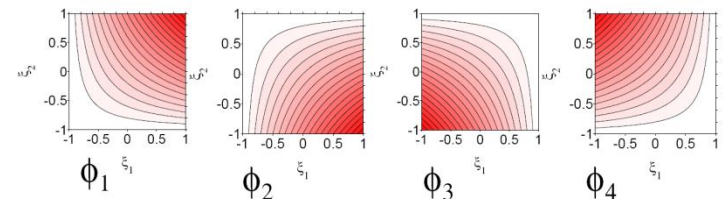
## 2. Metoda elementów skończonych

1) elementy np. czworokątne, rozłożone jak nam pasuje [pochodne liczymy dokładnie]



2) w każdym elemencie rozwiązanie przybliżone rozwijamy w bazie funkcji kształtu

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_k c_k \phi_k(x, y)$$



$$\int_{\Omega} w(L\tilde{u} - f)d\Omega = \int_{\Omega} w\epsilon d\Omega = 0$$

3. Funkcje wagowe:  $\phi_k$  (metoda Galerkina): równania na  $c_k$   
Błąd ortogonalny do bazy. Metoda równoważna wariacyjnej.

### 3. Metoda elementów brzegowych

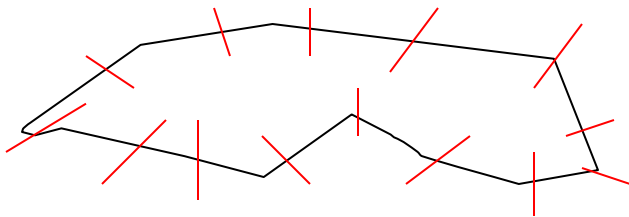
$$\int_{\Omega} w(L\tilde{u} - f)d\Omega = \int_{\Omega} w\epsilon d\Omega = 0$$

1) funkcja wagowa = rozwiązanie fundamentalne  
(swobodna funkcja Greena związana z operatorem  $L$ )  
= pozostanie nam równanie całkowe

2) wprowadzimy elementy brzegowe, oraz funkcje kształtu, które opiszą wartość  $u$  oraz jej pochodnej normalnej

3) policzymy „drugi warunek brzegowy”

4) wartość  $u$  w dowolnym punkcie dana będzie przez całkę konturową wzdłuż brzegu



## rozwiązanie fundamentalne (swobodna funkcja Greena)

niejednorodne równanie  
różniczkowe:

$$Lu=f \text{ plus wb.}$$

$$L\dot{u} = -\delta(x - a) \longleftarrow \text{Równanie fundamentalne operatora L}$$

$$\dot{u}(x; a)$$

rozwiązanie fundamentalne  
(odpowiedź na punktową niejednorodność,  
na źródło punktowe)

$x$ =punkt bieżący,  $a$  = źródło punktowego  
zaburzenia

na rozwiązanie fundamentalne  
nie nakłada się żadnych warunków brzegowych, poza

$$L\dot{u}(x; a) = 0 \text{ dla } x \neq a$$

$$L\dot{u} = -\delta(x - a)$$

→ rozw. fundamentalne będzie określone z dokładnością do rozwiązania równania jednorodnego  $Lu=0$

**funkcja Greena:** jedno z rozwiązań fundamentalnych:  
ma spełniać zadane warunki brzegowe

w MEB *swobodna funkcja Greena:* dowolna, ogólna  
byle dana prostym wzorem,  
warunków brzegowych spełniać nie musi  
(metoda ma działać dla dowolnych warunków brzegowych)



dalej pracujemy z  $L=\nabla^2$

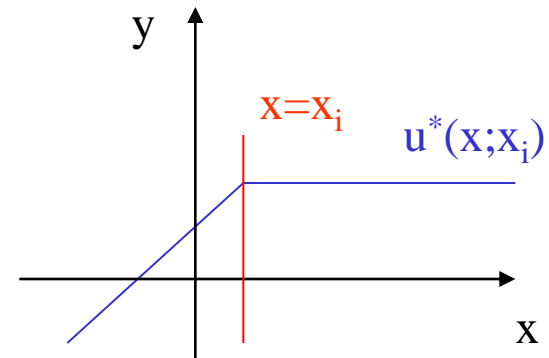
rozwiązanie fundamentalne 1D:

$$\frac{d^2 u^*}{dx^2} = -\delta(x - x_i) \quad u^*(x; x_i) = \begin{cases} x, & x \leq x_i \\ x_i, & x > x_i \end{cases}$$

---

$$\frac{du^*(x; x_i)}{dx} = \begin{cases} 1, & x \leq x_i \\ 0, & x > x_i \end{cases} = H(x_i - x)$$

$$\frac{dH(x_i - x)}{dx} = -\delta(x_i - x)$$



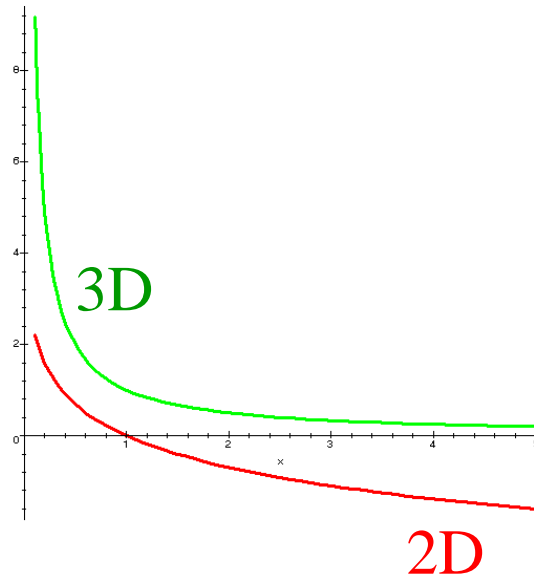
Ciągła funkcja  
nieciągła pochodna

$$\nabla^2 \dot{u} = -\delta(\mathbf{r}_i)$$

3D

2D

$$\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = +\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|)$$



rozwiązanie fundamentalne **2D**:

$$\nabla^2 \dot{u}(x, y; x_i, y_i) = -\delta(x_i - x)\delta(y_i - y)$$

współrzędne cylindryczne względem źródła

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

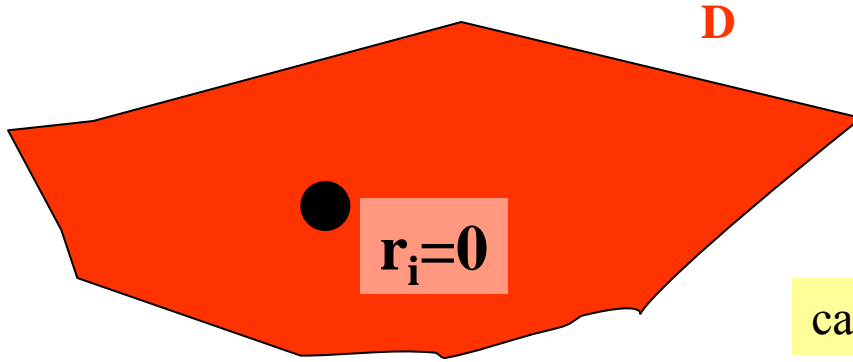
$$\nabla^2 \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \theta^2} \quad \text{ze względu na symetrię}$$

poza źródłem:  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \right) = 0$       równanie Laplace'a z radialną symetrią

$$\dot{u} = A \ln(r) + B$$

poza źródłem równanie  
fundamentalne spełnione,  
czy również w  $r=0$  ?

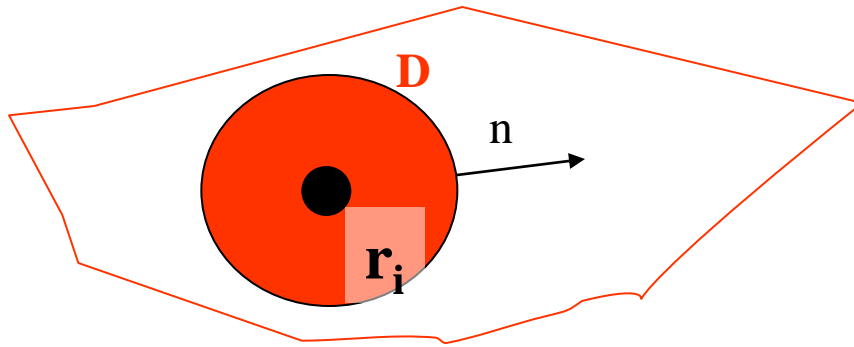
$$\dot{u} = A \ln(r) + B \quad \text{Czy} \quad \nabla^2 \dot{u} = -\delta(\mathbf{r}_i) \quad ?$$



całkujemy obustronnie, ma wyjść:

całka powierzchniowa po  $D$ : 
$$\int \nabla^2 \dot{u} dD = - \int \delta dD = -1$$

zamiast po D łatwiej po kole otaczającym źródło  
 (można, bo poza nim:  $\nabla^2 \dot{u} = 0$ )



$$\nabla^2 \dot{u} = -\delta(\mathbf{r}_i)$$

całkujemy obustronnie

całka powierzchniowa po D  $\int \nabla^2 \dot{u} dD = - \int \delta dD = -1$

+ całkowanie przez części 2D

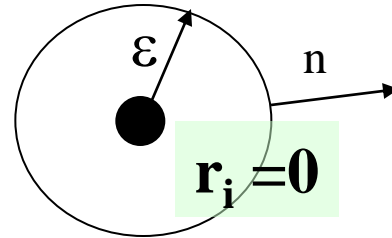
$$\int_{\Gamma} a \nabla b d\Gamma = \int_{\Omega} a \nabla^2 b d\Omega + \int_{\Omega} \nabla a \cdot \nabla b d\Omega$$

$a=1, b=\dot{u}$

$$\int \nabla^2 \dot{u} dD = \int \nabla \dot{u} d\Gamma = \int \frac{\partial \dot{u}}{\partial n} d\Gamma$$

$$\dot{u} = A \ln(r) + B$$

$$\int \nabla^2 \dot{u} dD = - \int \delta dD = -1$$



$$\int \nabla^2 \dot{u} dD = \int \nabla \dot{u} d\Gamma = \int \frac{\partial \dot{u}}{\partial n} d\Gamma$$

$$\int \frac{\partial \dot{u}}{\partial n} d\Gamma = \int \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} d\Gamma = \int \frac{A}{r} d\Gamma = \frac{A}{\epsilon} 2\pi\epsilon \quad \text{Ma wyjść -1}$$

$$\dot{u}(r; 0) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) + B \quad \leftarrow \text{Dla } A=-1/2\pi: \text{ laplasjan z } \dot{u} \text{ ma własności delty Diraca}$$

$$\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) + B$$

*B pozostaje dowolne, zazwyczaj bierze się  $B=0$*

2D:

$$\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|) -$$

---

Podobnie można sprawdzić, że w 3D:

$$\nabla^2 \dot{u} = -\delta(\mathbf{r}_i)$$
$$\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = +\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

niejednorodne równanie różniczkowe rozwiązane przy pomocy swobodnej funkcji Greena, przykład

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + x = 0 \quad \begin{array}{l} + \text{wb} \\ u(0)=u(1)=0 \end{array}$$

rozwiązanie:  $u(x)=x(1-x^2)/6$

metoda ważonych reszt

$$\int_0^1 \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + x \right) w(x) dx = 0$$

całkujemy przez części  $[u'w]' = u''w + u'w' \rightarrow u''w = [u'w]' - u'w'$

$$\int_0^1 \left( -\frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} \right) + \frac{du}{dx} w(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 xw(x) dx = 0$$

drugi raz przez części  $[uw']' = uw'' + u'w' \rightarrow u'w' = [uw']' - uw''$

$$\int_0^1 \left( u \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx - u \frac{dw}{dx} \Big|_0^1 + \frac{du}{dx} w \Big|_0^1 + \int_0^1 xw(x) dx = 0$$



$$\int_0^1 \left( u \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx - u \frac{dw}{dx} \Big|_0^1 + \frac{du}{dx} w \Big|_0^1 + \int_0^1 x w(x) dx = 0$$

weźmy:

$$w(x) = \dot{u}(x, x_i)$$

$$\frac{d^2 u^*}{dx^2} = -\delta(x - x_i)$$

$$u^*(x; x_i) = \begin{cases} x, & x \leq x_i \\ x_i, & x > x_i \end{cases}$$

$$-\int_0^1 (u \delta(x - x_i)) dx - u \frac{d\dot{u}}{dx} \Big|_0^1 + \frac{du}{dx} \dot{u} \Big|_0^1 + \int_0^1 x \dot{u} dx = 0$$

**! wymagana znajomość**

**zarówno  $u$  jak i jego pochodnej (normalnej) na brzegu !**

odpowiednik równania całkowego,  
które będziemy rozwiązywać w 2D

$$-\int_0^1 (u\delta(x - x_i)) dx - \underbrace{u \frac{d\dot{u}}{dx} \Big|_0^1 + \frac{du}{dx} \dot{u} \Big|_0^1}_{\text{odpowiednik całki powierzchniowej}} + \int_0^1 x \dot{u} dx = 0$$

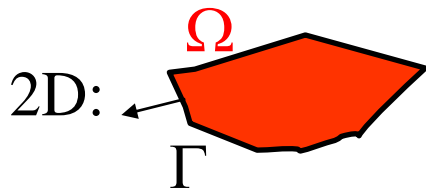
odpowiednik  
całki powierzchniowej

odpowiednik  
całki objętościowej

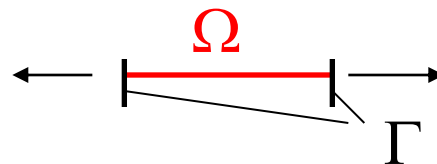
w 2D dostaniemy

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} \quad \dot{q} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial n}$$

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)d\Omega = \int_{\Gamma} (\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i)q(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r})\dot{q}(\mathbf{r})) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r})\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i)d\Omega$$



1D:



pochodna normalna:

- + d / dx z prawej części przedziału
- d / dx z lewej części przedziału

$$-\int_0^1 (u\delta(x - x_i)) dx - u \frac{d\dot{u}}{dx} \Big|_0^1 + \frac{du}{dx} \dot{u} \Big|_0^1 + \int_0^1 x\dot{u} dx = 0$$

$x_i$  z przedziału  $(0,1)$ , własności delty + warunki brzegowe na  $u(0)=u(1)=0$ :

$$-u(x_i) + \frac{du}{dx} \dot{u} \Big|_0^1 + \int_0^1 x\dot{u} dx = 0$$

można rozwiązać analitycznie

... analitycznie:

$x_i$  z przedziału  $(0,1)$ ,

$$-u(x_i) + \left. \frac{du}{dx} \dot{u} \right|_0^1 + \int_0^1 x \dot{u} dx = 0$$

$$u^*(x; x_i) = \begin{cases} x, & x \leq x_i \\ x_i, & x > x_i \end{cases}$$

$$-u(x_i) + \left. \frac{du}{dx} \dot{u} \right|_{x=1}^{1; x_i} - \left. \frac{du}{dx} \dot{u} \right|_{x=0}^{0; x_i} + \int_0^1 x \dot{u} dx = 0$$

$$-u(x_i) + \left. \frac{du}{dx} x_i \right|_{x=1} + \int_0^1 x \dot{u} dx = 0$$

$$-u(x_i) + \left. \frac{du}{dx} x_i \right|_{x=1} + \int_0^{x_i} x \dot{u} dx + \int_{x_i}^1 x \dot{u} dx = 0$$

$$-u(x_i) + \left. \frac{du}{dx} x_i \right|_{x=1} + \int_0^{x_i} x x dx + \int_{x_i}^1 x x_i dx = 0$$

$$-u(x_i) + \frac{du}{dx}x_i + \int_0^{x_i} xx dx + \int_{x_i}^1 xx_i dx = 0$$

$$-u(x_i) + \frac{du}{dx}\Big|_{x=1}x_i + \frac{1}{3}x_i^3 + x_i \frac{1}{2}x^2\Big|_{x_i}^1 = 0$$

$$-u(x_i) + \frac{du}{dx}\Big|_{x=1}x_i + \frac{1}{3}x_i^3 + \frac{x_i}{2}(1 - x_i^2) = 0$$

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=1}x_i - \frac{1}{6}x_i^3 + \frac{x_i}{2} = u(x_i)$$

bc : jeszcze raz  $u(1)=0$

$$\frac{du}{dx}(1) = -\frac{1}{3}$$

uwaga: wyznaczyliśmy  
po drodze w. Neumanna

$$u(x) = \frac{1}{6}(x - x^3)$$

(i tak będziemy  
robić w MEB)

## Rozwiązanie fundamentalne

$$\frac{d^2 u^*}{dx^2} = -\delta(x - x_i)$$

$$u^*(x; x_i) = \begin{cases} x, & x \leq x_i \\ x_i, & x > x_i \end{cases}$$

## a funkcja Greena

[z warunkami brzegowymi]

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + x = 0 \quad + \text{wb } u(0)=u(1)=0$$

doprowadziło nas do równania całkowego:

$$u(x_i) + \frac{du}{dx} \Big|_0^1 + \int_0^1 x \dot{u} dx = 0$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = -\delta(x - x_i)$$

plus  $g(x=0)=g(x=1)=0$

fcja Greena: konstruowana pod równanie niejednorodne

odpowieź na źródko punktowe + warunki brzegowe narzucone na równanie niejednorodne, które chcemy rozwiązać

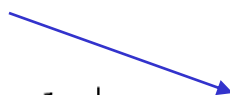
## Funkcja Greena z warunkami brzegowymi

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = -\delta(x - x_i) \text{ plus WB np. } g(x=0)=g(x=1)=0$$

własności  $g$ ? 1) spełnia określone warunki brzegowe na brzegu

pochodna w źródle:

$$\int_{x_i-\epsilon}^{x_i+\epsilon} \frac{d^2 g}{dx^2} = - \int_{x_i-\epsilon}^{x_i+\epsilon} \delta(x - x_i)$$


$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_i+\epsilon} - \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_i-\epsilon} = -1$$

2) skok pochodnej w źródle (mieliśmy tak również w rozw. fund.)

3) ma spełniać równanie jednorodne poza źródłem

$$g(x) = \begin{cases} Ax & ; x < x_i \\ B(x - 1) & ; x > x_i \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} Ax & ; x < x_i \\ B(x - 1) & ; x > x_i \end{cases}$$

4) zażądajmy ciągłości fcji *Greena* w  $x_i$

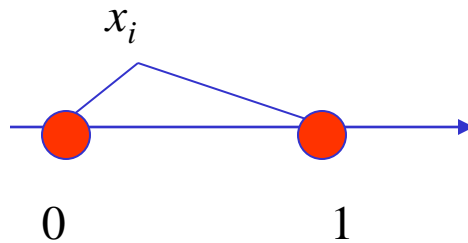
$$Ax_i = B(x_i - 1)$$

plus skok pochodnej:

$$B - A = -1$$

$$\begin{aligned} B &= -x_i \\ A &= (1 - x_i) \end{aligned}$$

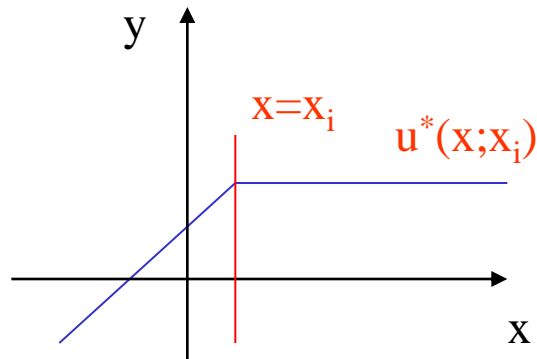
$$g(x; x_i) = \begin{cases} (1 - x_i)x & ; x < x_i \\ -x_i(x - 1) & ; x > x_i \end{cases}$$





swobodna funkcja Greena

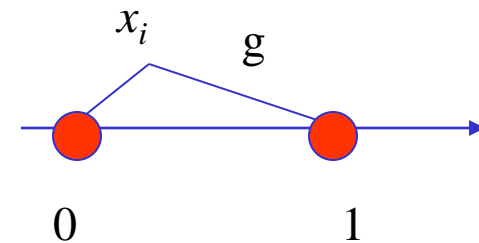
$$u^*(x; x_i) = \begin{cases} x, & x \leq x_i \\ x_i, & x > x_i \end{cases}$$



funkcja Greena (z warunkami brzegowymi)

$$g(x; x_i) = \begin{cases} (1 - x_i)x & ; x < x_i \\ -x_i(x - 1) & ; x > x_i \end{cases}$$

z  $u^*$  do  $g$ : dodane rozwiązanie Laplace'a  
 $-x_i x$



własność ogólna:

$g(a; b) = g(b; a)$  [wpływ źródła w  $a$  na punkt  $b$   
taki jak źródła w  $b$  na punkt  $a$ ]

Jaki zysk z  $g$ ?

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + x = 0 \quad + \text{wb } u(0)=u(1)=0$$

$$\int_0^1 \left( u \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx - u \frac{dw}{dx} \Big|_0^1 + \frac{du}{dx} w \Big|_0^1 + \int_0^1 x w(x) dx = 0$$

weźmy:  $w=g(x;x_i)$

$$u(x_i) = - \int_0^1 x g(x; x_i) dx$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = -\delta(x - x_i)$$

plus WB np.  $g(x=0)=g(x=1)=0$

zamiast:

$$u(x_i) + \frac{du}{dx} \dot{u} \Big|_0^1 + \int_0^1 x \dot{u} dx = 0$$

ogólnie  $Lu=f$

$$u(x_i) = \int_0^1 f(x) g(x; x_i) dx$$

Rozwiązanie równania różniczkowego:

Niejednorodność scałkowana z funkcją Green'a

Green z warunkiem brzegowym

$$u(x_i) = \int_0^1 x g(x; x_i) dx$$

Greena swobodna

$$u(x_i) = -\frac{du}{dx} \Big|_0^1 + \int_0^1 x \dot{u} dx$$



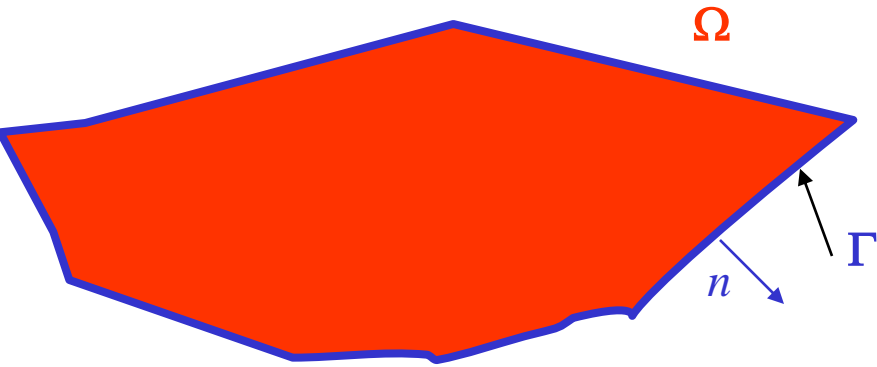
znacznie prostsze  
dlaczego w BEM stosuje się trudniejszy przepis?

znalezienie funkcji Greena  $g$  z dowolnymi warunkami brzegowymi dla dowolnie skomplikowanego brzegu jest trudne w ogóle, a w szczególności trudne do zautomatyzowania.

Dlatego zamiast  $g$ :

swobodna funkcja Greena: prosty wzór, zależny tylko od typu równania

## Równanie różniczkowe do całkowego



$$\nabla^2 u = -\rho(\mathbf{r})$$

słaba forma równania z fcją Greena jako wagą

$$\int_{\Omega} u (\nabla^2 u + \rho(\mathbf{r})) d\Omega = 0$$

Całkowanie przez części:

$$\int_{\Gamma} a \nabla b d\Gamma = \int_{\Omega} a \nabla^2 b d\Omega + \int_{\Omega} \nabla a \cdot \nabla b d\Omega \quad |$$

Tożsamość Gaussa Greena

$$\int_{\Omega} (b \nabla^2 a - a \nabla^2 b) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( b \frac{\partial a}{\partial n} - a \frac{\partial b}{\partial n} \right) d\Gamma$$

BEM odpowiada metodzie reszt ważonych z wagą w postaci rozwiązania fundamentalnego:

$$\nabla^2 \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

$$Lu = f \longrightarrow \int_{\Omega} \dot{u}(Lu - f) d\Omega = 0$$

$$\nabla^2 u = -\rho(\mathbf{r}) \longrightarrow \int_{\Omega} \dot{u}(\nabla^2 u + \rho(\mathbf{r})) d\Omega = 0$$

TGG:  $\int_{\Omega} (b\nabla^2 a - a\nabla^2 b) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( b \frac{\partial a}{\partial n} - a \frac{\partial b}{\partial n} \right) d\Gamma$   $b = \dot{u}$

$$\int_{\Omega} b\nabla^2 a d\Omega = \int_{\Omega} a\nabla^2 b d\Omega + \int_{\Gamma} \left( b \frac{\partial a}{\partial n} - a \frac{\partial b}{\partial n} \right) d\Gamma$$

$a = u$

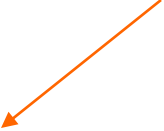
$$\int_{\Omega} \dot{u}\nabla^2 u d\Omega = \int_{\Omega} u\nabla^2 \dot{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \left( \dot{u} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \dot{u}}{\partial n} \right) d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} \dot{u}\nabla^2 u d\Omega = - \int_{\Omega} u\delta(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Omega + \int_{\Gamma} \left( \dot{u} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \dot{u}}{\partial n} \right) d\Gamma$$

$$\nabla^2 u = -\rho(\mathbf{r})$$

$$\int_{\Omega} \dot{u} (\nabla^2 u + \rho(\mathbf{r})) d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \dot{u} \nabla^2 u d\Omega = - \int_{\Omega} u \delta(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Omega + \int_{\Gamma} \left( \dot{u} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \dot{u}}{\partial n} \right) d\Gamma$$


$$\int_{\Omega} u \delta(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Omega = - \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Omega + \int_{\Gamma} \left( \dot{u} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \dot{u}}{\partial n} \right) d\Gamma$$

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Omega} u \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d\Omega$$

z oznaczeniami:

$$q = \frac{\partial u}{\partial n}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial n}$$

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} [\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) q(\mathbf{r}) - \dot{q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) u(\mathbf{r})] d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) \rho(\mathbf{r}) d\Omega$$

Podstawowe równanie MEB:

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} [\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) q(\mathbf{r}) - \dot{q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) u(\mathbf{r})] d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) \rho(\mathbf{r}) d\Omega$$

pochodzi z:

- 1) reszty ważone z wagą w postaci rozwiązania fundamentalnego
- 2) druga tożsamość Greena aby przenieść operator różniczkowy z nieznanego rozwiązania do rozwiązania fundamentalnego
- 3) własności delty Diraca
- 4) silnej formy równania różniczkowego

Zamieniliśmy cząstkowe równanie różniczkowe na równanie całkowe (w sposób ścisły): do tej pory : brak przybliżeń

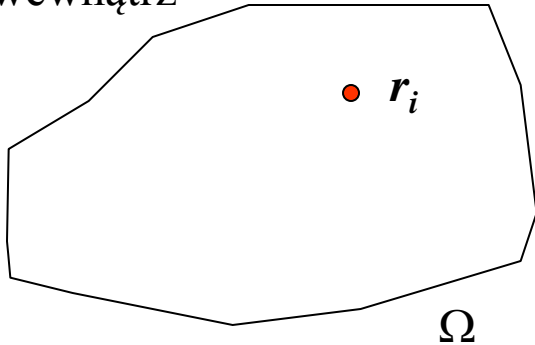
$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Omega} u \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d\Omega$$

Jakie  $c_i$  ?

---

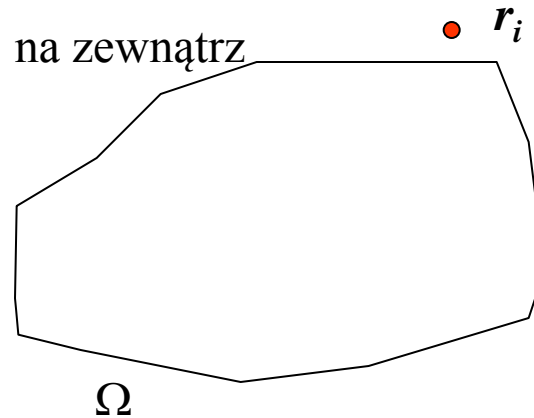
$c_i$  zależy : gdzie umieścimy źródło  $\mathbf{r}_i$

wewnątrz



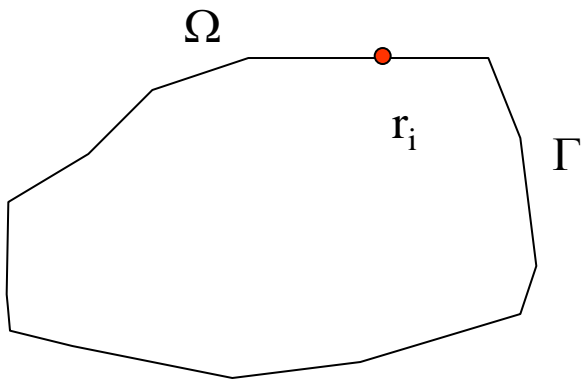
$$c_i = 1$$

na zewnątrz



$$c_i = 0$$





na brzegu

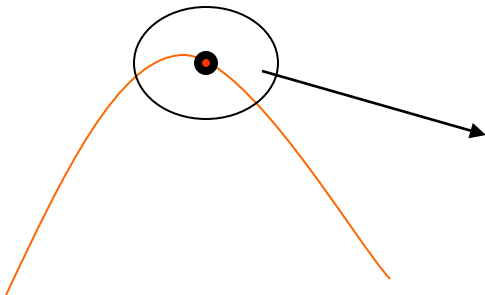
$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Omega} u \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d\Omega$$

dla metody elementów brzegowych: akurat sytuacja z brzegiem jest najważniejsza

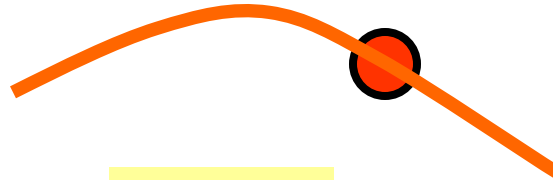
$\mathbf{r}_i$  na brzegu:

$c_i = ?$

na gładkiej części brzegu:

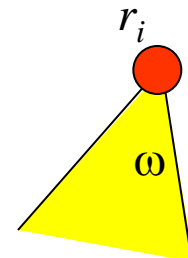


w powiększeniu fragment gładkiej części brzegu jest odcinkiem prostej (delta Diraca przecięta na pół)



$c_i = 1/2$

brzeg ma prawo mieć kąty



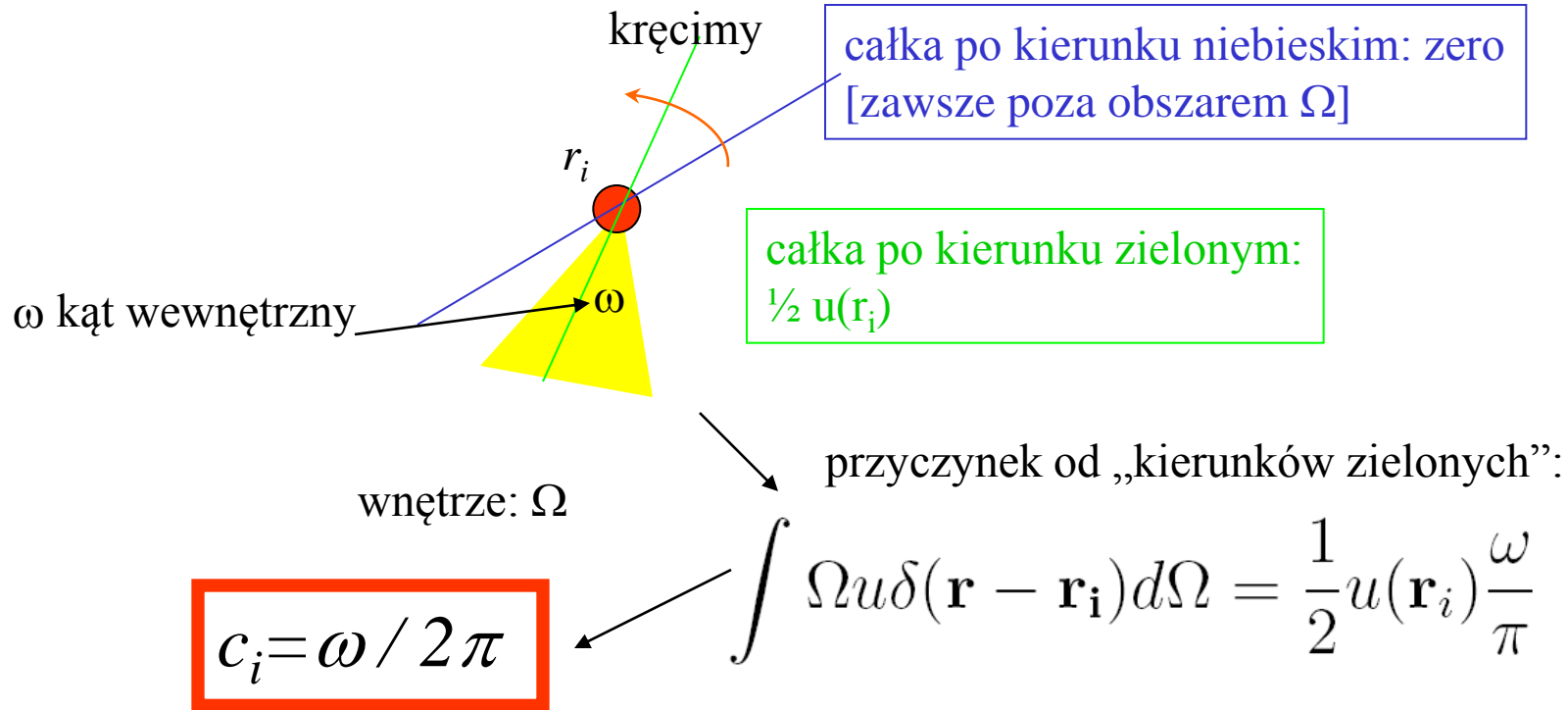
wnętrze

$$1D: \int_{-\infty}^{x_i} u(x)\delta(x - x_i)dx = \int_{x_i}^{\infty} u(x)\delta(x - x_i)dx = \frac{1}{2}u(x_i)$$

delta jest „funkcją” parzystą

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Omega} u \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d\Omega$$

całkujemy po prostych przechodzących przez  $\mathbf{r}_i$   
i obracamy je o kąt  $\pi$ :



## podstawowe równanie MEB

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} [\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) q(\mathbf{r}) - \dot{q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) u(\mathbf{r})] d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) \rho(\mathbf{r}) d\Omega$$

---

Jeśli znamy  $u$  oraz  $q$  znajdziemy rozwiązanie w każdym punkcie wewnątrz  $\Omega$ !

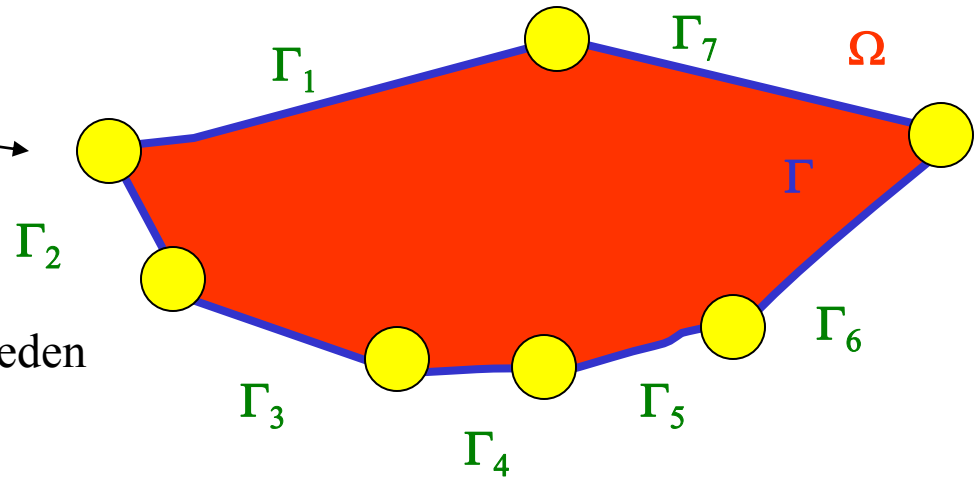
Ale warunki brzegowe zadaje się albo na  $u$  albo na  $q$ ,  
*skąd drugi warunek brzegowy?*

# Metoda elementów brzegowych:

nie zawiera niewiadomych  
nie wnosi wiele do idei,  
Powiedzmy więc że  $\rho=0$

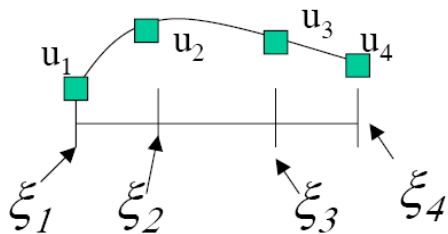
$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} [\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) q(\mathbf{r}) - \dot{q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) u(\mathbf{r})] d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) \rho(\mathbf{r}) d\Omega$$

brzeg dzielony na elementy



na każdym elemencie brzegowym zadany jeden warunek brzegowy, „drugi” wyliczany

wartości  $u$  oraz  $q$  opisane przy pomocy interpolacji



$$\phi_i(\xi) = \prod_{j \neq i} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} = l_i(\xi)$$

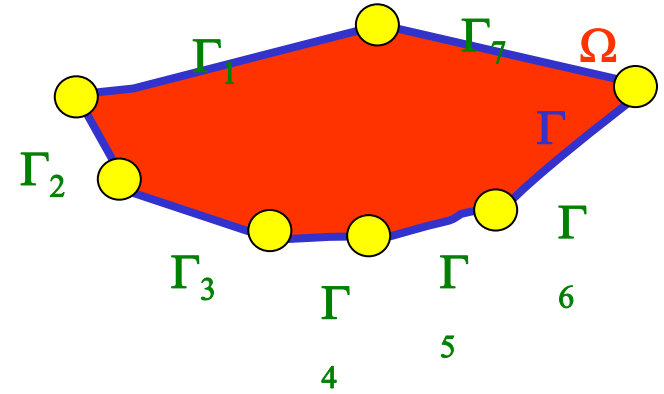
wielomian węzłowy Lagrange'a

$$u(\xi) = u_1 \phi_1(\xi) + u_2 \phi_2(\xi) + u_3 \phi_3(\xi) + u_4 \phi_4(\xi)$$

w jaki sposób wyliczany drugi warunek brzegowy?

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} [\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) q(\mathbf{r}) - \dot{q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) u(\mathbf{r})] d\Gamma$$

$$c_i u_i = \sum_{n=1}^N \int \dot{u} q d\Gamma_n - \sum_{n=1}^N \int \dot{q} u d\Gamma_n$$



$$c_i u_i = \sum_{n=1}^N \int \dot{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \sum_k q(n, k) \Phi_k(\mathbf{r}) d\Gamma_n - \sum_{n=1}^N \int \dot{q}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \sum_k u(n, k) \Phi_k(\mathbf{r}) d\Gamma_n$$

N węzłów, N niewiadomych

punkt obserwacji  $\mathbf{r}_i$  ustawiany kolejno w każdym węźle brzegowym.  
każde wstawienie da nam jedno równanie = układ równań liniowych

$$c_i u_i = \sum_{n=1}^N \sum_k q(n, k) g_k^{in} - \sum_{n=1}^N \sum_k u(n, k) h_k^{in}$$

$$h_k^{in} = \int \Phi_k(\mathbf{r}) \dot{q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Gamma_n \quad g_k^{in} = \int \Phi_k(\mathbf{r}) \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Gamma_n$$

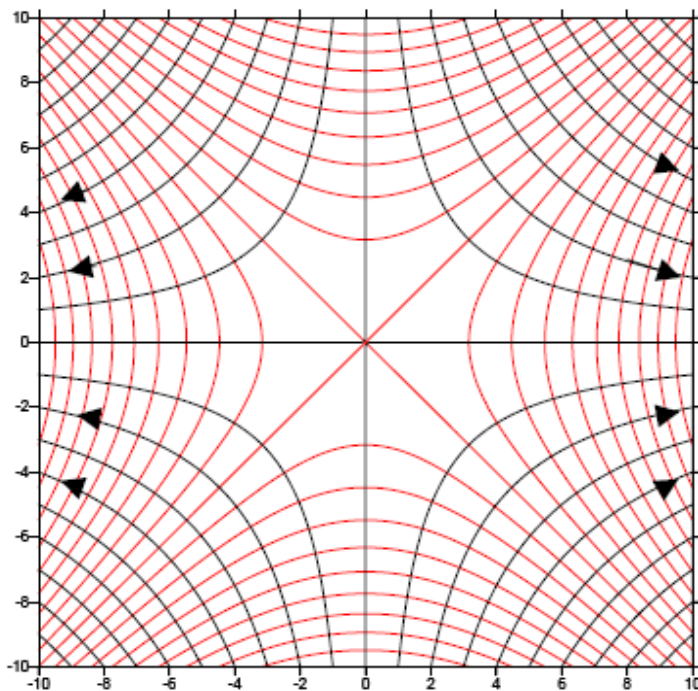
Problem modelowy: *stagnation flow*

$$\nabla^2 u = 0, u = x^2 - y^2$$

$$\text{grad}(u) = (2x, -2y)$$

Przykład Przepływ stagnacyjny (*flow in the corner*)

$$\left. \begin{aligned} u &= 2x \\ v &= -2y \end{aligned} \right|$$



$$\phi = x^2 - y^2$$

$$\psi = 2xy \quad |$$

$$\nabla^2 u = 0$$

$$\nabla^2 \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}')$$

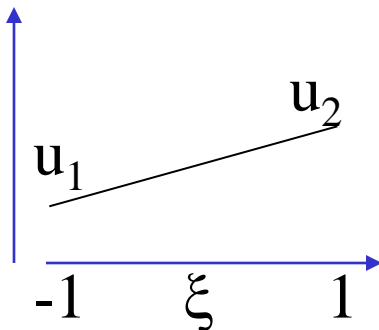
$$\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial n}$$

$$c_i u_i = \sum_{n=1}^N \int \dot{u} q d\Gamma_n - \sum_{n=1}^N \int \dot{q} u d\Gamma_n$$

w każdym elemencie: opisujemy  $u$  oraz  $q$  na brzegu  
w bazie funkcji kształtu, weźmy najprostsze (liniowe):

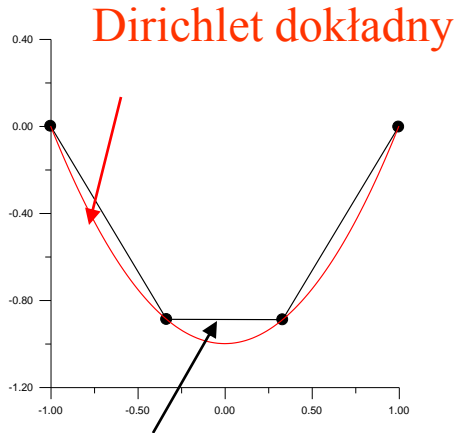


$$u(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)u_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)u_2$$

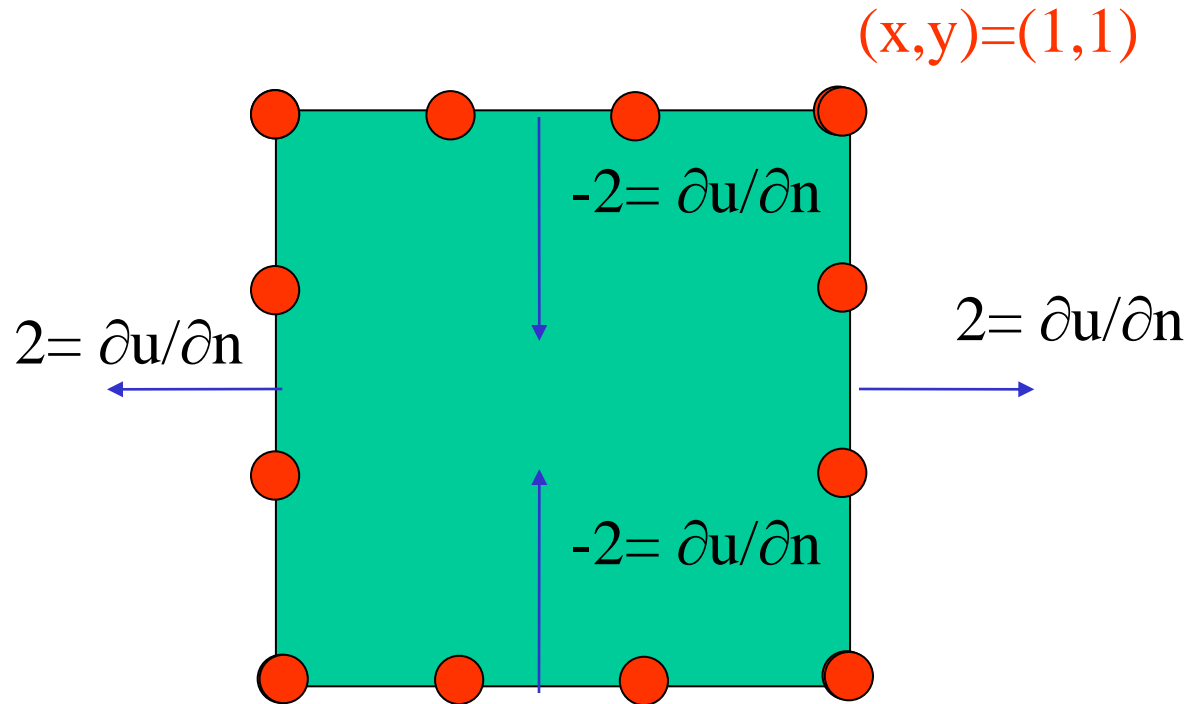
$$q(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)q_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)q_2$$

Uwaga: na ogół **tylko** w węzłach udaje się wprowadzić dokładne warunki brzegowe

# Wstawimy warunek Dirichleta i będziemy starali się odzyskać warunek Neumanna



przybliżony Dirichlet  
 (wynik interpolacji  
 dokładnego warunku  
 brzegowego w bazie  
 liniowych funkcji kształtu)



$(x,y)=(-1,-1)$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \text{gradu}(u)$$



# macierze wpływu

$$c_i u_i = \sum_{n=1}^N \int \dot{u} q d\Gamma_n - \sum_{n=1}^N \int \dot{q} u d\Gamma_n$$

$$u(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)u_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)u_2$$
$$q(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)q_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)q_2$$

$$c_i u_i = \sum_{n=1}^N \int \dot{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) (q(n, 1)\Phi_1(\mathbf{r}) + q(n, 2)\Phi_2(\mathbf{r})) d\Gamma_n$$
$$- \sum_{n=1}^N \int \dot{q}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) (u(n, 1)\Phi_1(\mathbf{r}) + u(n, 2)\Phi_2(\mathbf{r})) d\Gamma_n$$

pierwszy (lewy) węzeł  
elementu  $n$ -tego : on numerze globalnym  $lg(n, 1)$   
[buchalteria węzłów i składanie macierzy dokładnie  
tak jak w MES]

# macierze wpływu

$$c_i u_i = \sum_{n=1}^N \int \dot{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) (q(n, 1)\Phi_1(\mathbf{r}) + q(n, 2)\Phi_2(\mathbf{r})) d\Gamma_n$$
$$- \sum_{n=1}^N \int \dot{q}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) (u(n, 1)\Phi_1(\mathbf{r}) + u(n, 2)\Phi_2(\mathbf{r})) d\Gamma_n$$

numeruje lokalizację delty D.  
(źródła, fcji Greena)

numeruje element

$$h_k^{in} = \int \Phi_k(\mathbf{r}) \dot{q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Gamma_n$$

numeruje  
fcje kształtu  
(lokalna numeracja węzłów)

podobnie:

$$g_k^{in} = \int \Phi_k(\mathbf{r}) \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Gamma_n$$

wtedy:

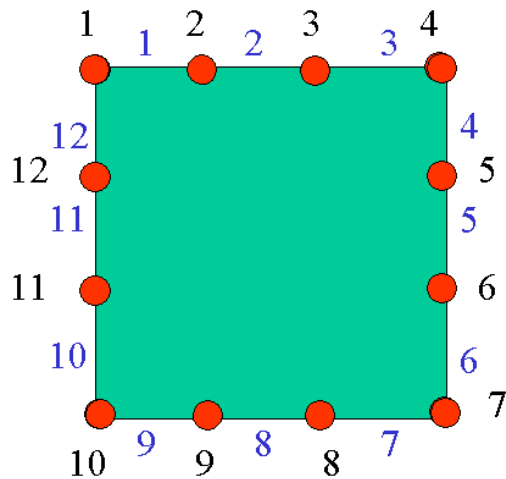
$$c_i u_i = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 q(n, k) g_k^{in} - \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 u(n, k) h_k^{in}$$

$$C_i u_i = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 q(n, k) g_k^{in} - \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 u(n, k) h_k^{in}$$

co można przedstawić w postaci

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gq}$$

macierze H i G trzeba poskładać [jak w MES]



Węzeł 1 = lokalny 1 elementu 1  
oraz lokalny 2 elementu 12

# Składanie macierzy wpływu

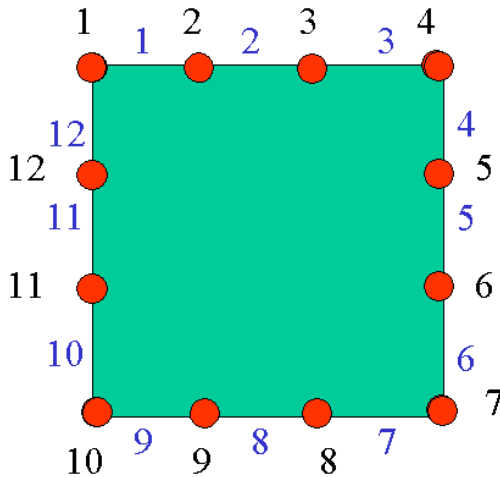
$$c_i u_i = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 q(n, k) g_k^{in} - \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 u(n, k) h_k^{in}$$

numeruje lokalizację delty D.

$$h_k^{in} = \int \Phi_k(\mathbf{r}) \dot{q}(\mathbf{r})$$

numeruje  
fcje kształtu

zaczepmy źródło w  $i=1$   
[pierwszy wiersz]



$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q}$$

pierwszy wiersz macierzy H:

$$\left[ \underline{c_1} + h_1^{11} + h_2^{1,12}, h_2^{11} + h_1^{12}, \dots \right]$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

=

$$\left[ g_1^{11} + g_2^{1,12}, g_2^{11} + g_1^{12}, \dots \right]$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

pierwszy wiersz macierzy G:

w  $j$ -tym wierszu  $c$  wchodzi do diagonalni  
[do kolumny  $j$ ]

## liczymy lokalne macierze wpływu

$$h_k^{in} = \int \Phi_k(\mathbf{r}) \dot{q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Gamma_n$$

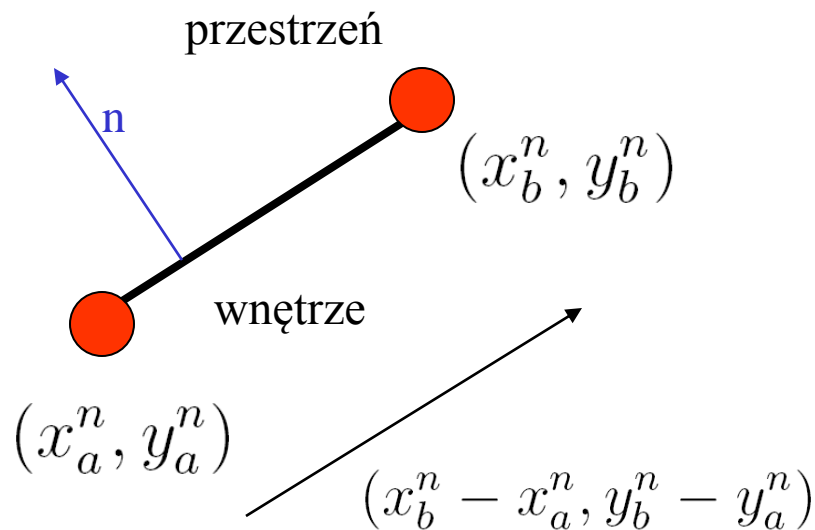
$$\dot{q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = \frac{\partial \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i)}{\partial n}$$

$$\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$$

$$\nabla \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{x - x_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2}, -\frac{1}{2\pi} \frac{y - y_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \right)$$

$$\dot{q} = n \cdot \nabla \dot{u}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{y_a^n - y_b^n)^2 + (x_b^n - x_a^n)^2}} (y_a^n - y_b^n, x_b^n - x_a^n)$$



całkować będziemy po elemencie odniesienia ze zmienną  $\xi$

$$x = \frac{x_a^n + x_b^n}{2} + \frac{x_b^n - x_a^n}{2} \xi$$

$$y = \frac{y_a^n + y_b^n}{2} + \frac{y_b^n - y_a^n}{2} \xi$$

całkować będziemy po elemencie  
odniesienia ze zmienną  $\xi$

$$x = \frac{x_a^n + x_b^n}{2} + \frac{x_b^n - x_a^n}{2}\xi$$

$$y = \frac{y_a^n + y_b^n}{2} + \frac{y_b^n - y_a^n}{2}\xi$$

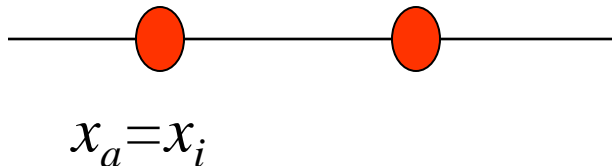
$$h_k^{in} = \int_{-1}^1 d\xi \Phi_k(\xi) J^n \dot{q}(x(\xi), y(\xi); \mathbf{r}_i)$$

$$\dot{q} = n \cdot \nabla \dot{u}$$

$$\dot{q} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(y_a^n - y_b^n)^2 + (x_b^n - x_a^n)^2}} \left( \frac{(y_a^n - y_b^n)(x - x_i)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} + \frac{(x_b^n - x_a^n)(y - y_i)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \right)$$

$$J_n = \frac{\sqrt{(y_a^n - y_b^n)^2 + (x_b^n - x_a^n)^2}}{2}$$

możliwa próba scałkowana 1/x od 0



$$\dot{q} = n \cdot \nabla \dot{u}$$

$$\nabla \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{x - x_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2}, -\frac{1}{2\pi} \frac{y - y_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \right)$$

całkować będziemy po elemencie odniesienia ze zmienną  $\xi$

$$x = \frac{x_a^n + x_b^n}{2} + \frac{x_b^n - x_a^n}{2}\xi$$

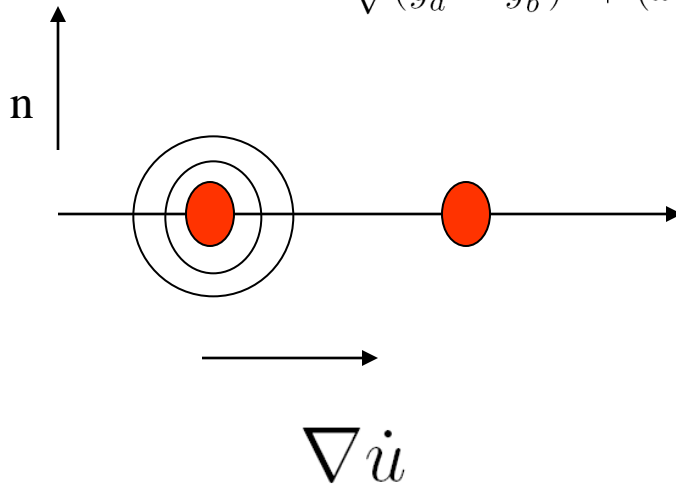
$$y = \frac{y_a^n + y_b^n}{2} + \frac{y_b^n - y_a^n}{2}\xi$$

$$h_k^{in} = \int_{-1}^1 d\xi \Phi_k(\xi) J^n \dot{q}(x(\xi), y(\xi); \mathbf{r}_i)$$

$$\dot{q} = \mathbf{n} \cdot \nabla \dot{u}$$

$$\nabla \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{x - x_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2}, -\frac{1}{2\pi} \frac{y - y_i}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \right)$$

$$\dot{q} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(y_a^n - y_b^n)^2 + (x_b^n - x_a^n)^2}} \left( \frac{(y_a^n - y_b^n)(x - x_i)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} + \frac{(x_b^n - x_a^n)(y - y_i)}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2} \right)$$



Zagrożenie jest pozorne:  
na prostym elemencie,  
w którego węzle zlokalizowana  
jest funkcja Greena  
jej gradient jest prostopadły  
do wektora normalnego do  
powierzchni.

$$\dot{q} = n \cdot \nabla u$$



jeśli **element** nie będzie prosty: *grad u* będzie *lokalnie prostopadły* do  $n$ , co wystarczy aby całka skończona

$$\int_{\epsilon > 0}^1 \frac{1}{x} dx$$

w praktyce: ta całka jest najtrudniejsza do obliczenia  
(najwolniej zbieżna) [można uniknąć jej liczenia korzystając z reguły sumowania podanej  
poniżej]



W problemie laboratoryjnym całki macierzy wpływu  $h$  są łatwe do policzenia

dajmy osobliwość do węzła  $i=2$

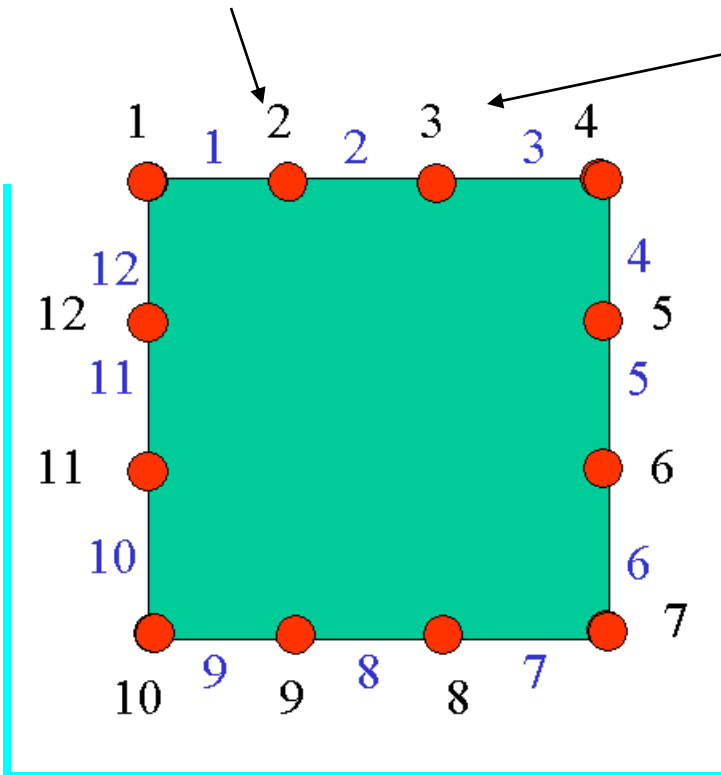
na tym fragmencie brzegu:  
elementy  $h$  są zero  
bo gradient z rozwiązania fundamentalnego jest do brzegu styczny

numeruje lokalizację delty D.

$$h_k^{in} = \int \Phi_k(\mathbf{r}) \dot{q}(\mathbf{r})$$

numeruje element  
numeruje fcje kształtu

Na pozostałej części brzegu elementy  $h$  nie znikają, ale są łatwe do policzenia bo  $1/(r-r_2)$  zbyttno się nie zmieniać nie będzie na długości jednego elementu brzegowego



wniosek:

$$H_{ii} = c_i$$

$$c_i u_i = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 q(n, k) g_k^{in} - \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 u(n, k) h_k^{in}$$

**odpowiednia chwila by zobaczyć, że:**  
*macierze wpływu MEB są niesymetryczne,*  
 [w MES dla równania Poissona macierze sztywności były symetryczne]

pierwszy wiersz H  
 ze źródła wstawionego do  
 węzła 1

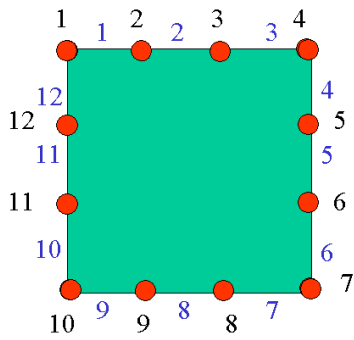
$$\left[ c_1 + h_1^{11} + h_2^{1,12}, \quad \underline{h_2^{11} + h_1^{12}}, \quad \dots \right]$$

zero (węzeł 2  
 należy do elementu 1 i 2)

drugi wiersz  
 ze źródła  
 wstawionego do  
 węzła 2

$$\left[ \underline{h_1^{21} + h_2^{2,12}}, \quad c_2 + h_2^{21} + h_1^{22}, \quad \dots \right]$$

węzeł 2  
 nie należy do elementu 12  
 więc zero nie wyjdzie



ten wyraz  
**jest zero**  
 węzeł 2 sąsiedni  
 z 1

numeruje lokalizację delty D.  
 numeruje element

$$h_k^{in} = \int \Phi_k(\mathbf{r}) \dot{q}(\mathbf{r})$$

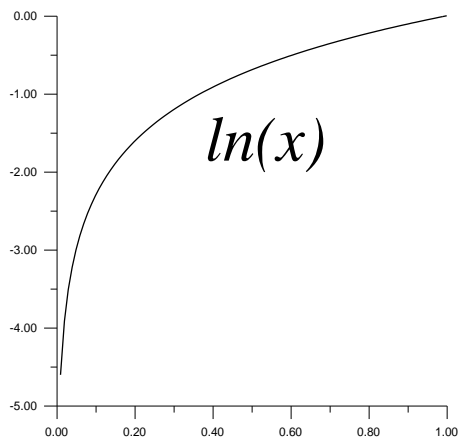
numeruje  
 fcje kształtu

druga lokalna macierz wpływu:

$$g_k^{in} = \int \Phi_k(\mathbf{r}) \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Gamma_n$$

$$\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$$

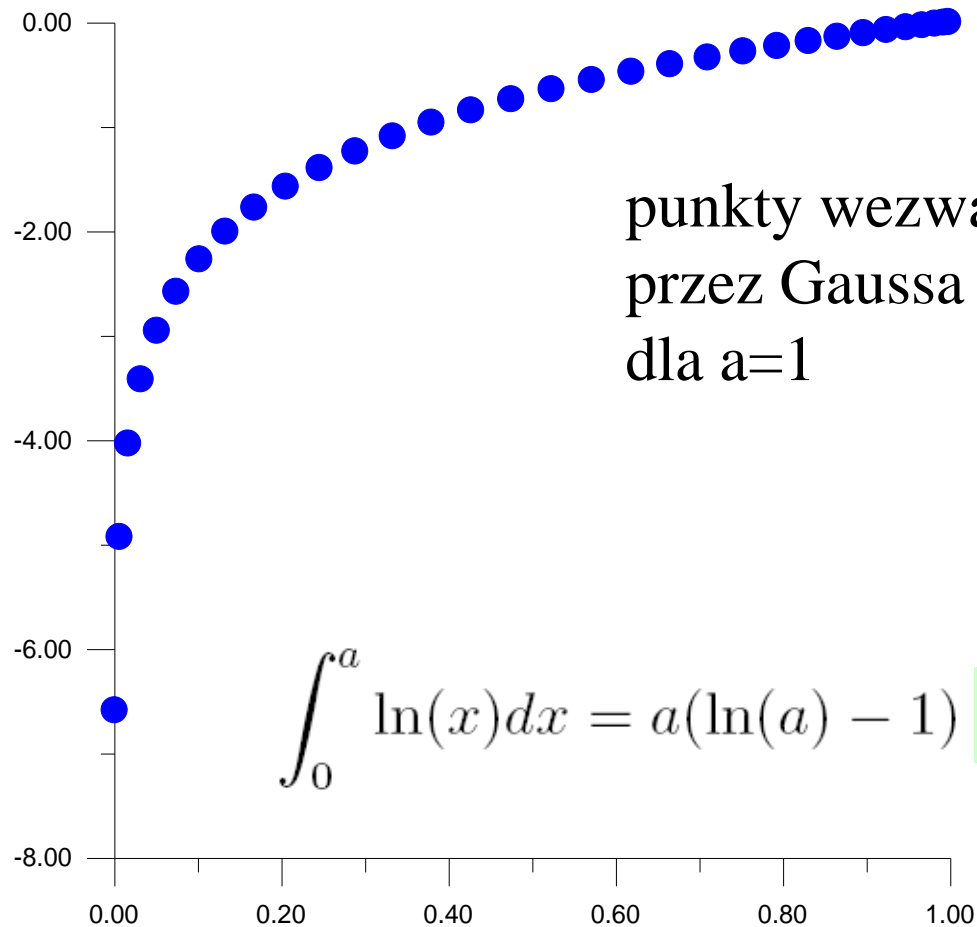
gdy osobliwość znajduje się w jednym z węzłów:  
trzeba ją scałkować [ta osobliwość całkowalną jest]



$$\int_0^a \ln(x) dx = a(\ln(a) - 1)$$

kwadratury Gaussa świetnie się sprawdzają

# Całkowanie kwadraturą Gaussa funkcji z logarytmiczną osobliwością

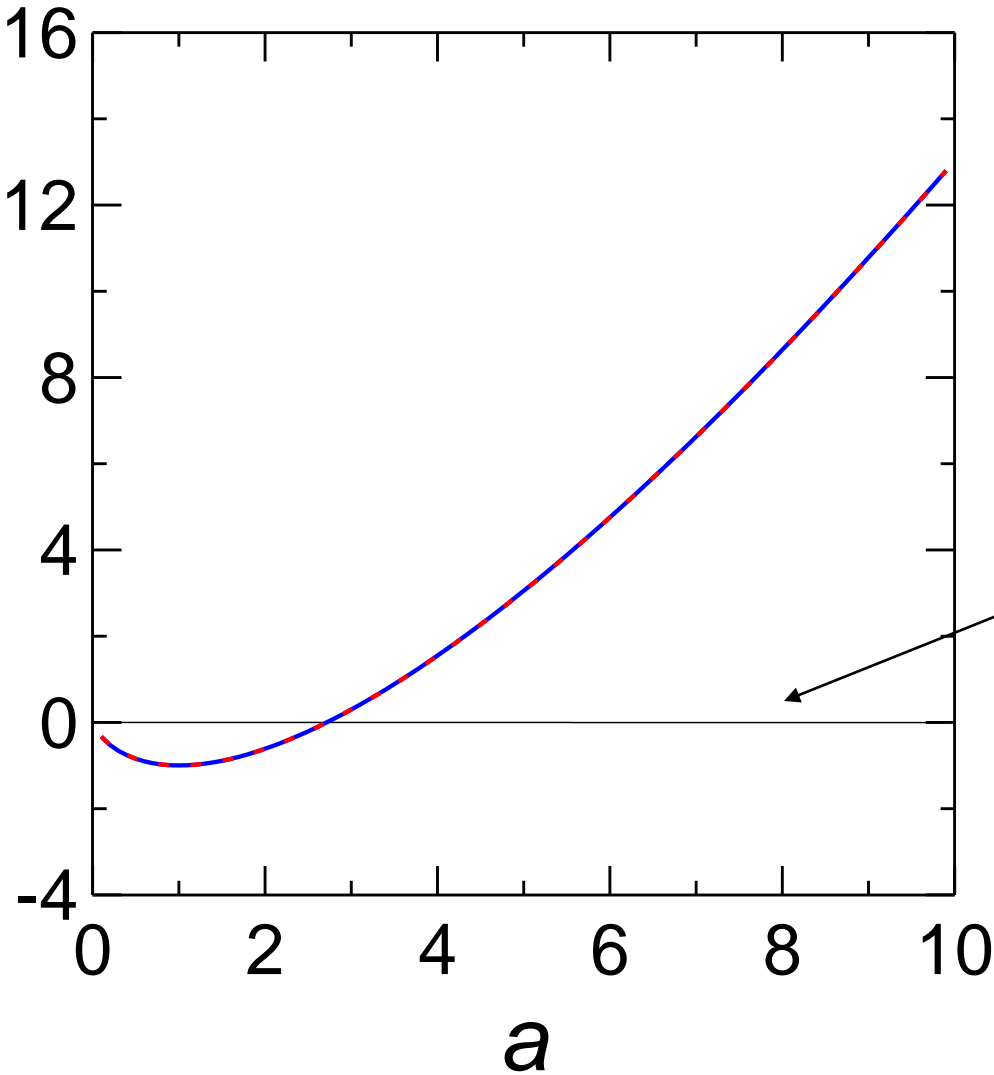


punkty wezwane  
przez Gaussa 32 punktowego  
dla  $a=1$

wynik num:    zamiast:  
-0.9994022    -1

$$\int_0^a \ln(x) dx = a(\ln(a) - 1) \quad \text{dla } a=1$$

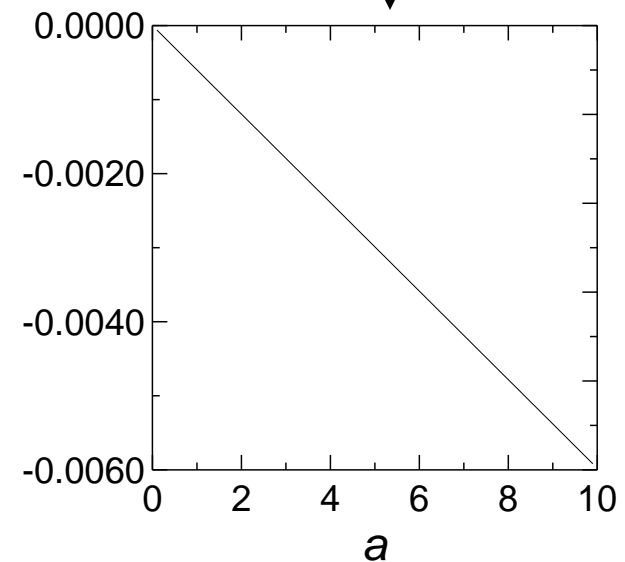
$$\int_0^a \ln(x) dx = a(\ln(a) - 1)$$



niebieski: Gauss numeryczny  
32 punkty

czzerwony: analityczny

czarny: błąd [analityczny-  
numeryczny]



# Składanie globalnych macierzy wpływu

Lokalizacja osobliwości rozwiązania fundamentalnego w węźle  $i$ -tym produkuje  $i$ -ty wiersz macierzy  $\mathbf{H}$  oraz  $\mathbf{G}$

Liczymy macierze lokalne, a następnie składamy globalne:

$$\mathbf{H}(i, lg(k, l))_+ = h_l^{ik},$$

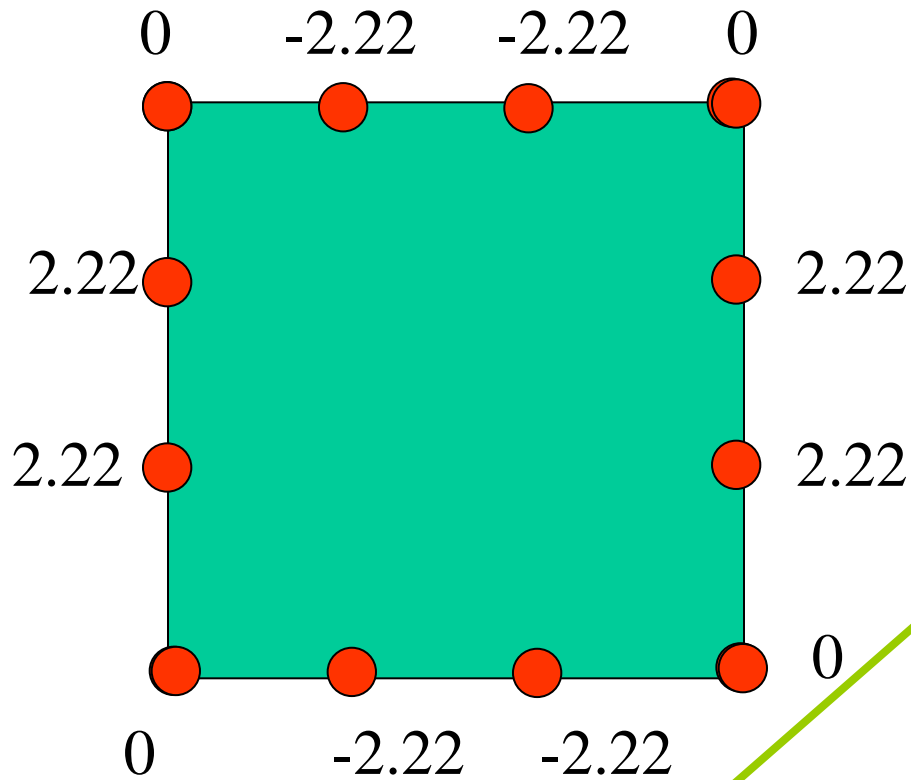
$$\mathbf{G}(i, lg(k, l))_+ = g_l^{ik}.$$

$lg(k,l)$  – globalny numer węzła  $l$ -tego w  $k$ -tym elemencie brzegowym

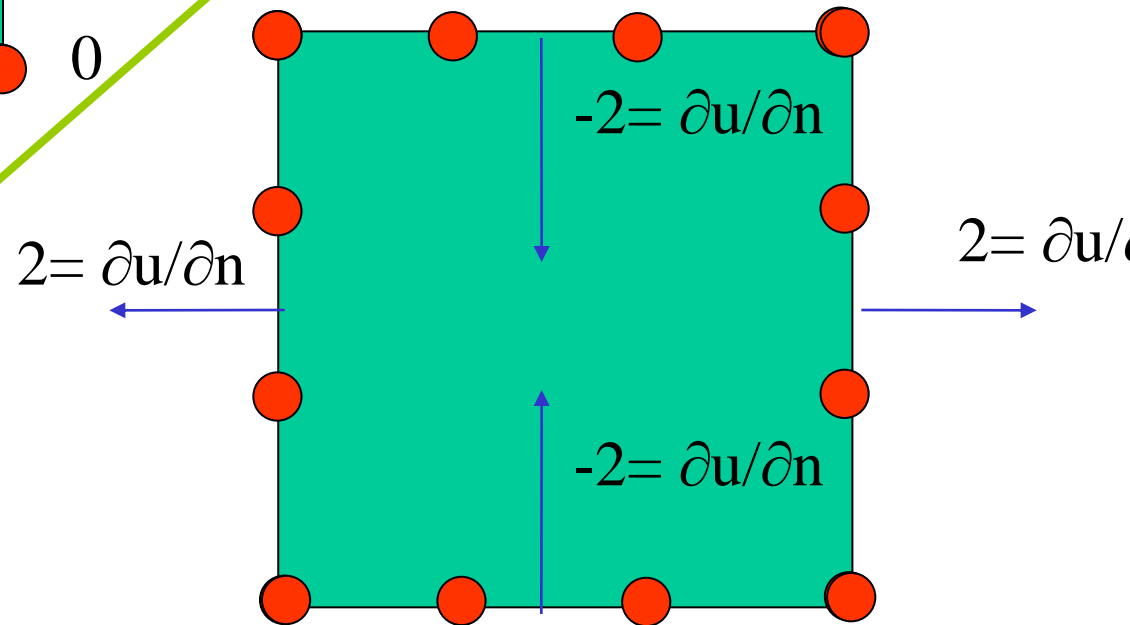
Kończymy uzupełniając diagonalę  $\mathbf{H}$  o parametry geometryczne  $c$  :

$$\mathbf{H}_{ii} = \mathbf{H}_{ii} + c_i.$$

wyniki dla  $du/dn$  na brzegu: (wstawiamy D, liczymy N)



dokładne:

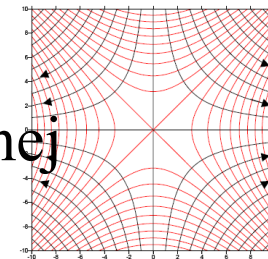


wynik: zerowa  $\partial u / \partial n$  na kantach

MEB: przewiduje jedną wartość pochodnej normalnej w węźle

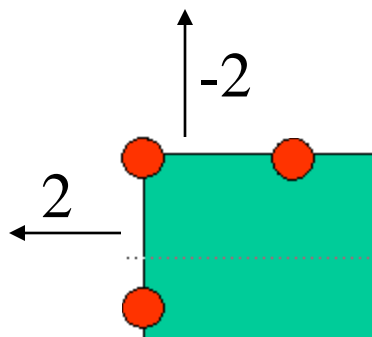
$$u = 2x$$

$$v = -2y$$



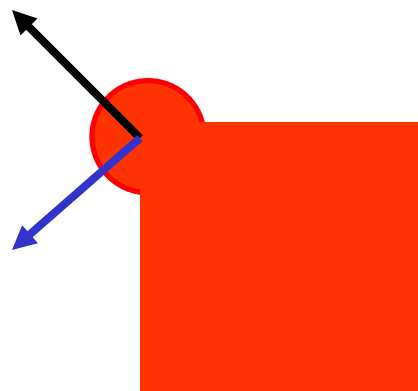
$$\phi = x^2 - y^2$$

$$\psi = 2xy$$



jaka ma być pochodna normalna na kancie?  
jeśli będziemy udawać, że kant jest zaokrąglony

$$\text{grad}(u) = (-2x, -2y)$$



zero akurat jest wynikiem

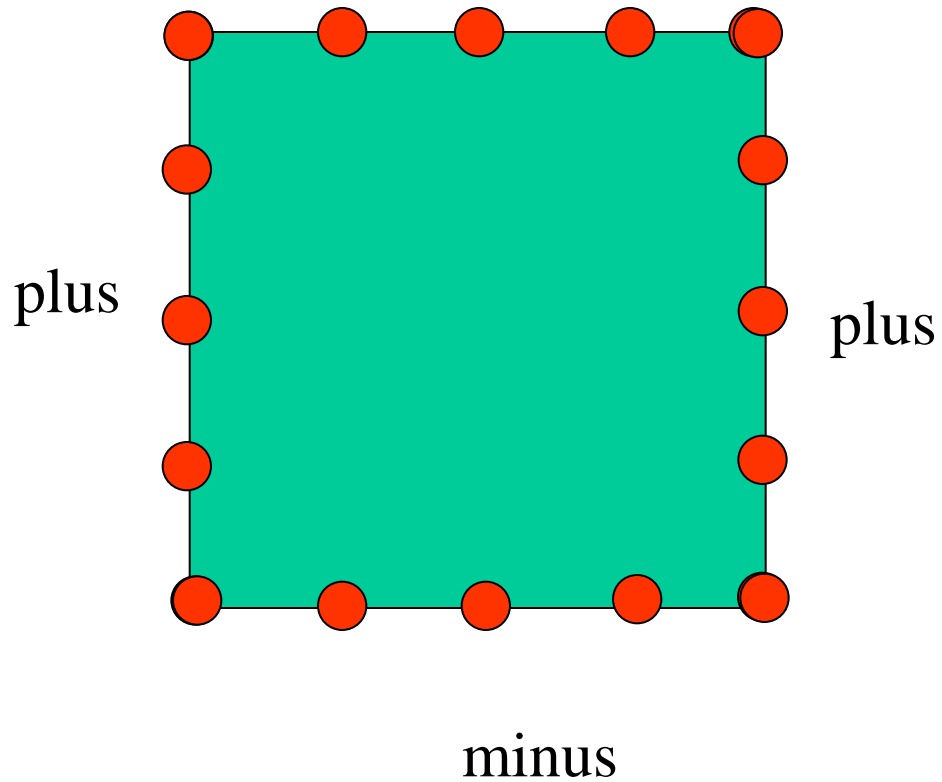
poprawnym dla takiego węzła.... ale problem **jest** kłopotliwy numerycznie



4 elementy brzegowe na bok kwadratu (równe odstępy):

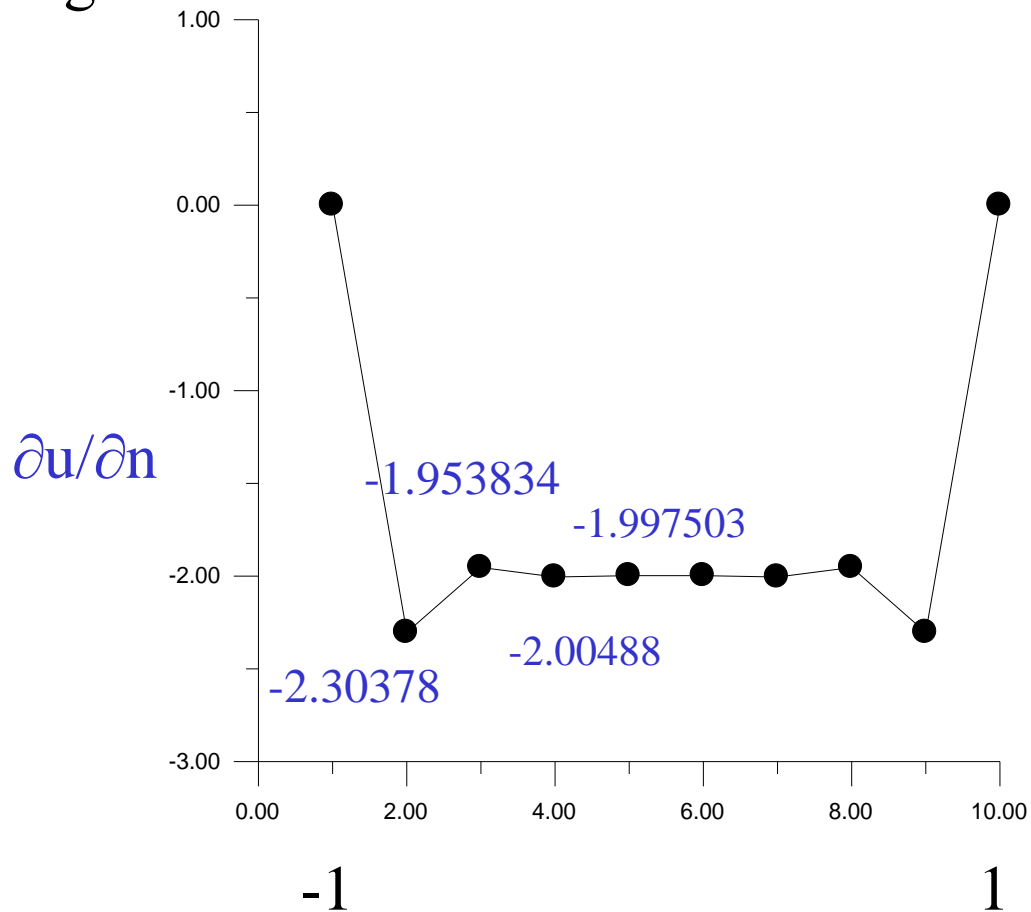
$$\partial u / \partial n$$

0 -2.286 -1.95 -2.286 0



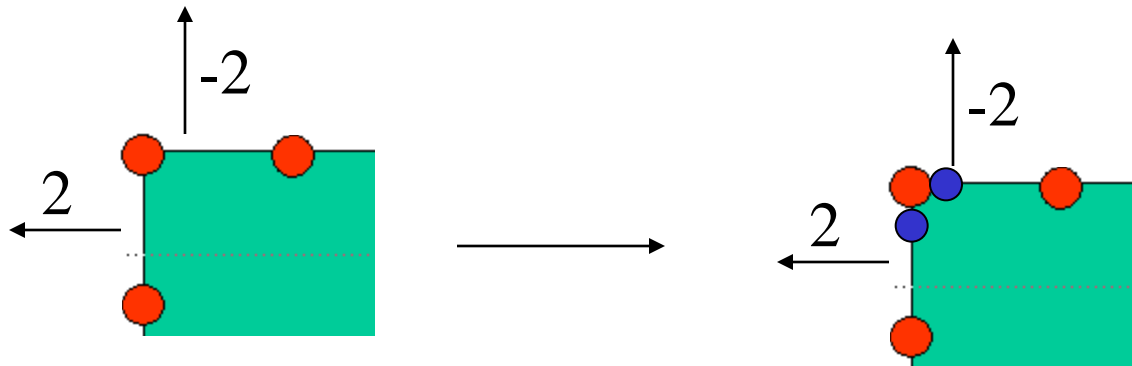
# 9 elementów brzegowych na bok kwadratu (równe odstępy):

górny brzeg:



0 na kancie  
ma uzasadnienie,  
jako wartość główna  
pochodnej  
ale powoduje  
problemy dla  
interpolacji  
rozwiązania na  
pionowych  
i poziomych końcach.  
metoda wolałaby  
dwa parametry  
niezależne.

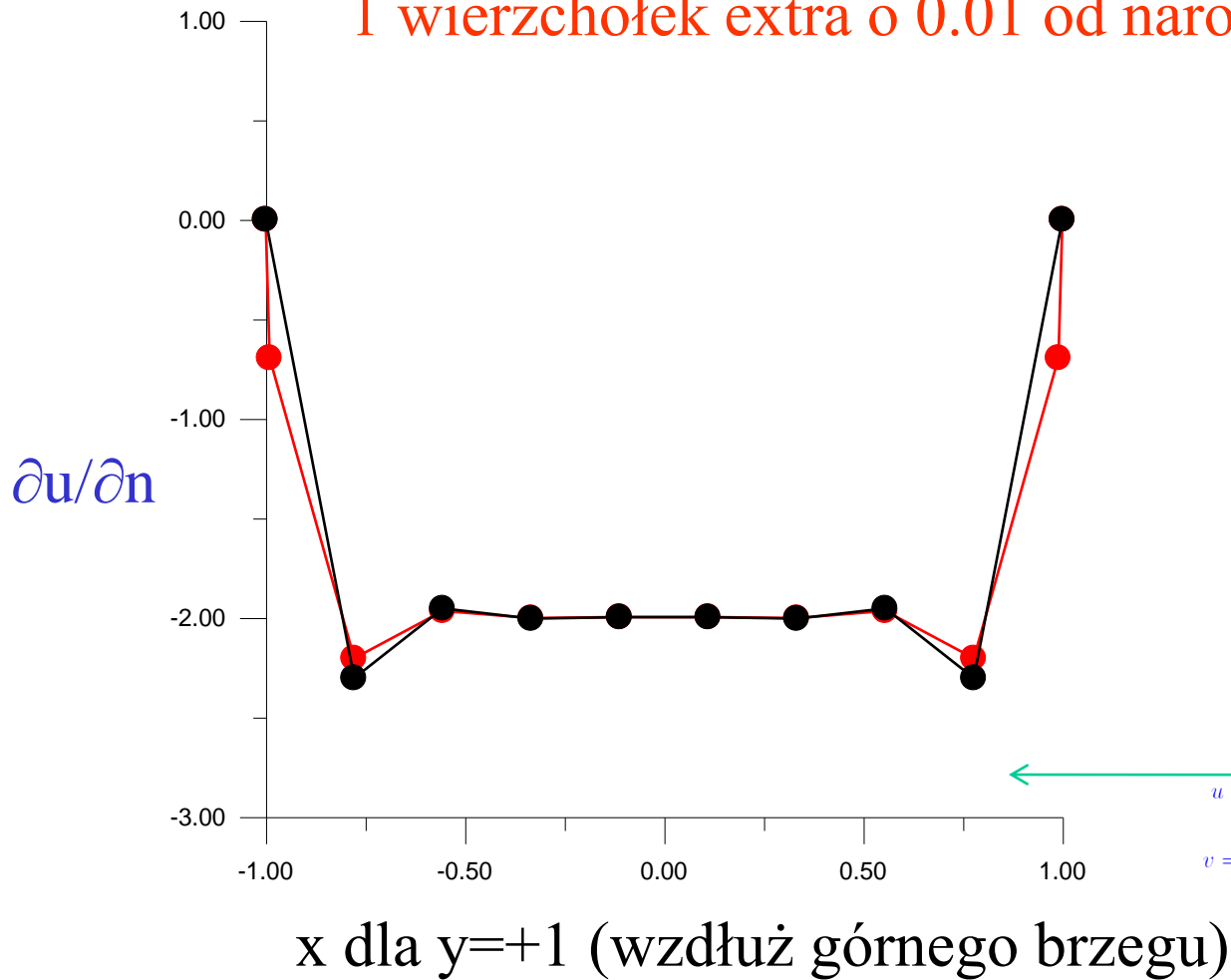
pomysł na rozwiązanie problemu



osaczyć kant  
nowymi wierzchołkami

równo rozłożone wierzchołki

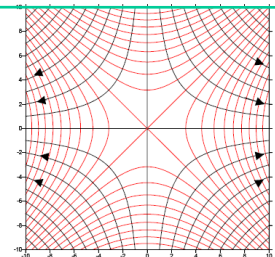
1 wierzchołek extra o 0.01 od narożnika



Przykład 2. Przepływ stagnacyjny (*flow in the corner*)

$$u = 2x$$

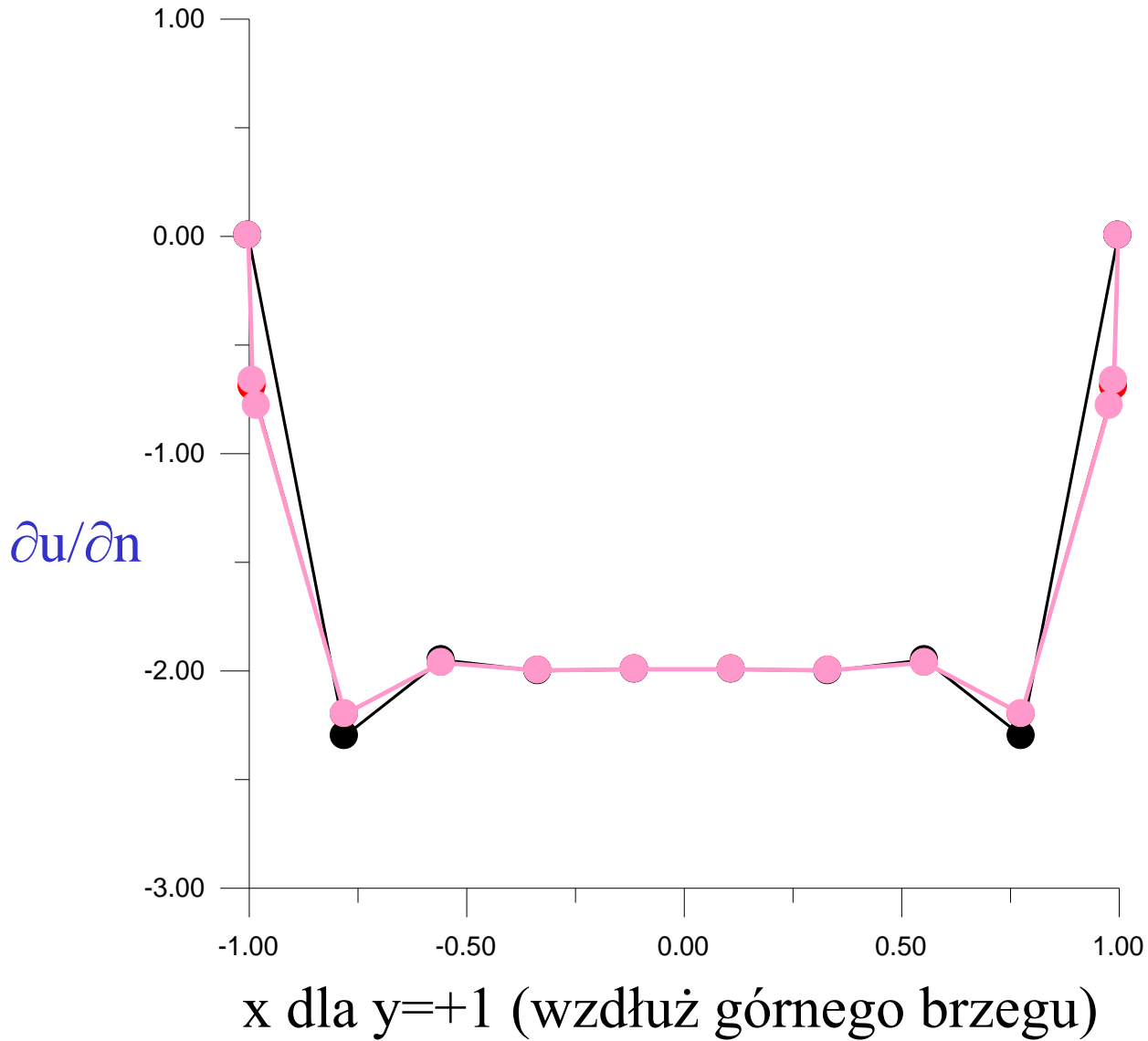
$$v = -2y$$



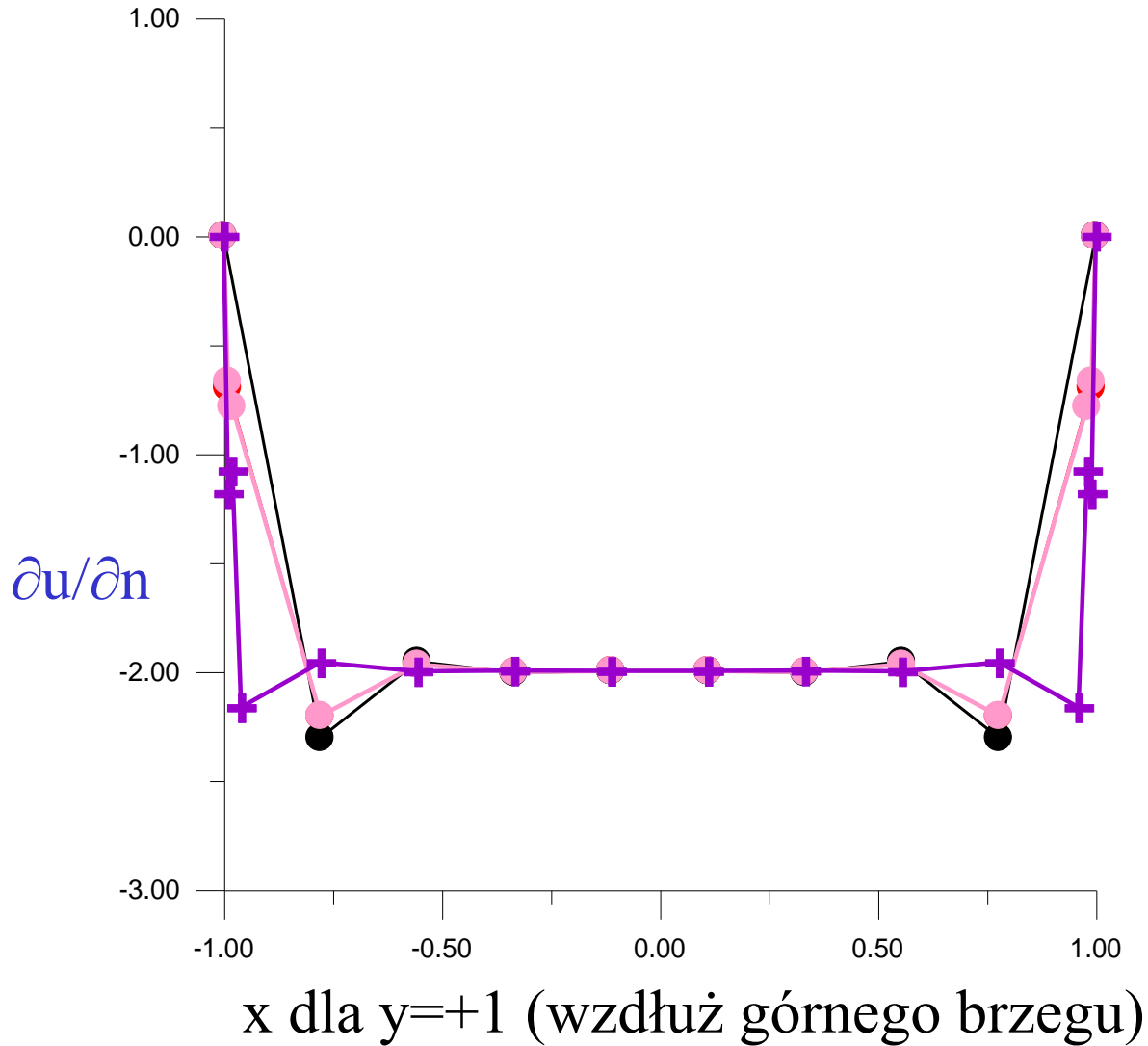
$$\phi = x^2 - y^2$$

$$\psi = 2xy$$

drugi wierzchołek extra o 0.01 od poprzedniego



trzeci wierzchołek extra o 0.02 od poprzedniego



wniosek: problem można zawęzić do okolic brzegu, gdzie istotnie występuje. Dla całki punktowej i skończone przekłamanie funkcji podcałkowej bez znaczenia.

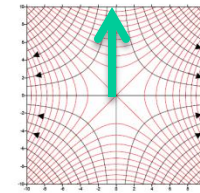
Po wyznaczeniu brakującego warunku brzegowego  
Wyznamy  $u$  wewnątrz obszaru całkowania ze wzoru ...

$$\cancel{C_i} u_i = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 q(n, k) g_k^{in} - \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 u(n, k) h_k^{in}$$

trzeba macierze wpływu przeliczyć  
dla każdej (nowej) lokalizacji  
punktu obserwacji  $\mathbf{r}_i$

Uwaga: mamy całkowitą swobodę  
w wyborze siatki punktów, w których  
znajdziemy  $u_i$ . Liczymy tylko tam, gdzie  
rozwiązanie nas interesuje.

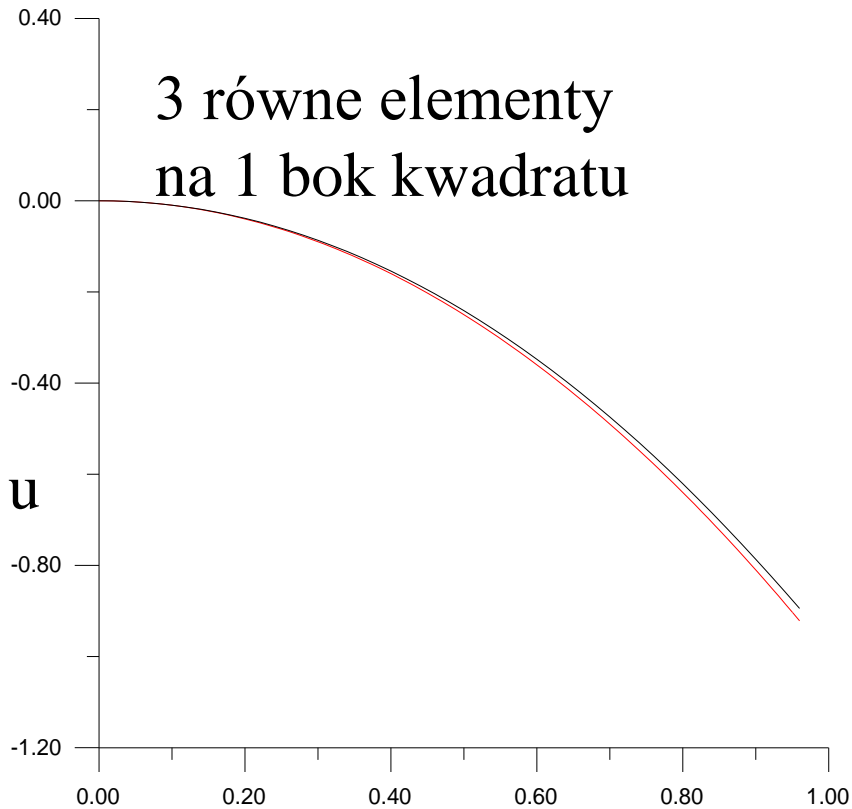
$$\begin{cases} u = 2x \\ v = -2y \end{cases}$$



$$\phi = x^2 - y^2$$

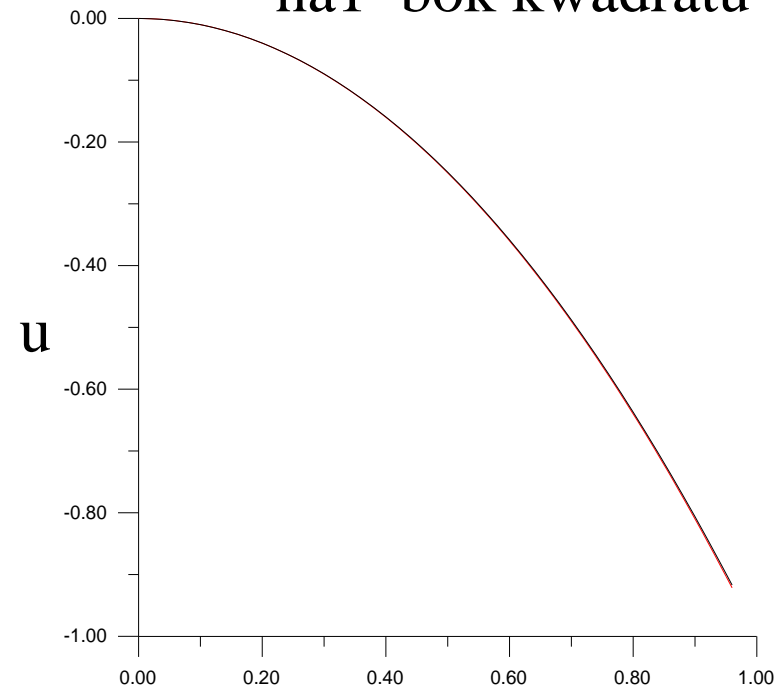
$$\psi = 2xy$$

wyniki na osi  $x=0$   
 czarne= numeryczne  
 czerwone  $-y^2$



y (dla  $x=0$ )

9 równych elementów  
na 1 bok kwadratu

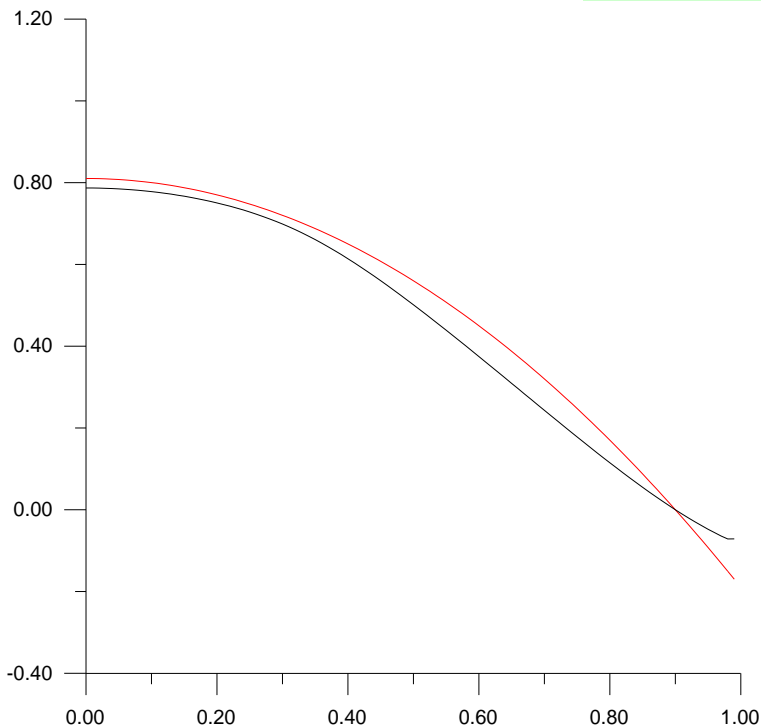
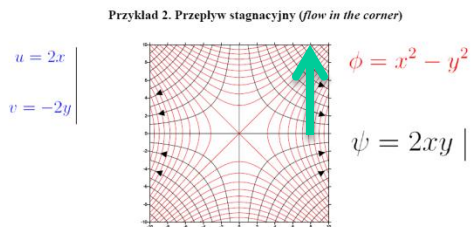


y (dla  $x=0$ )

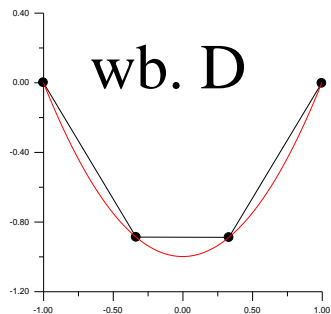
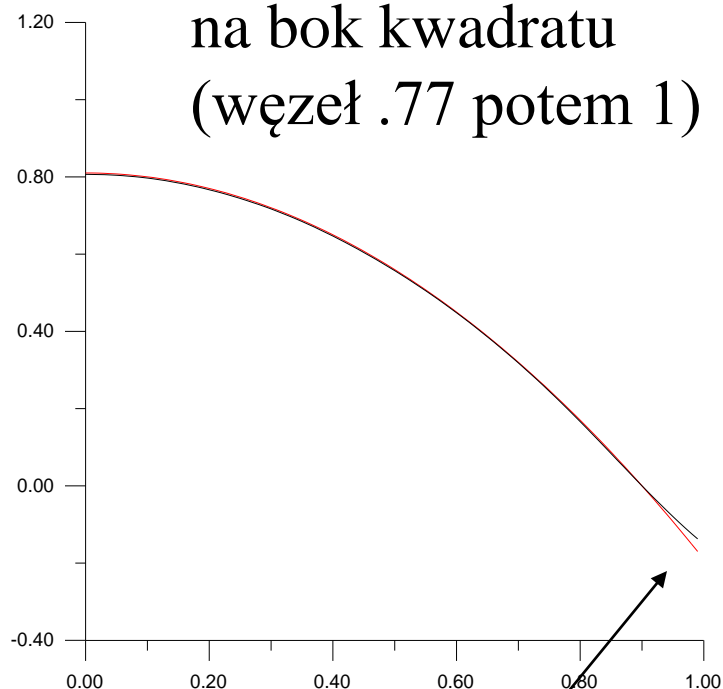


3 równe elementy  
na bok kwadratu

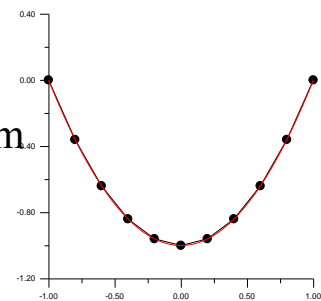
wzdłuż:  $x=0.9$   
czarne= numeryczne  
czerwone  $.9^2 - y^2$



9 równych elementów  
na bok kwadratu  
(węzeł .77 potem 1)



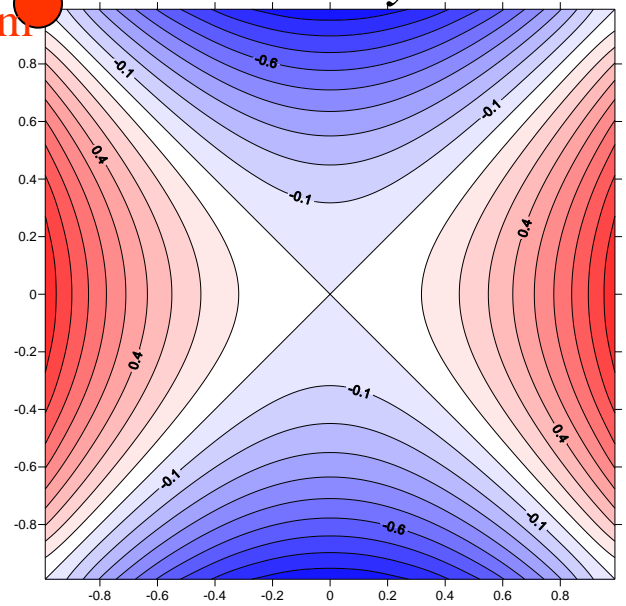
warunek Dirichleta wciąż nie całkiem spełniony  
[kwadratowe funkcje kształtu rozwiązałyby problem  
– po prawej]



Inne warunki brzegowe:  
 Dirichlet na **niezerowej** części brzegu  
 Neumann na reszcie

Dirichlet  
 w jednym  
 punkcie

$$u = x^2 - y^2$$



$$Hu = Gq$$

Składamy jak zawsze

$$Dx = Cy$$

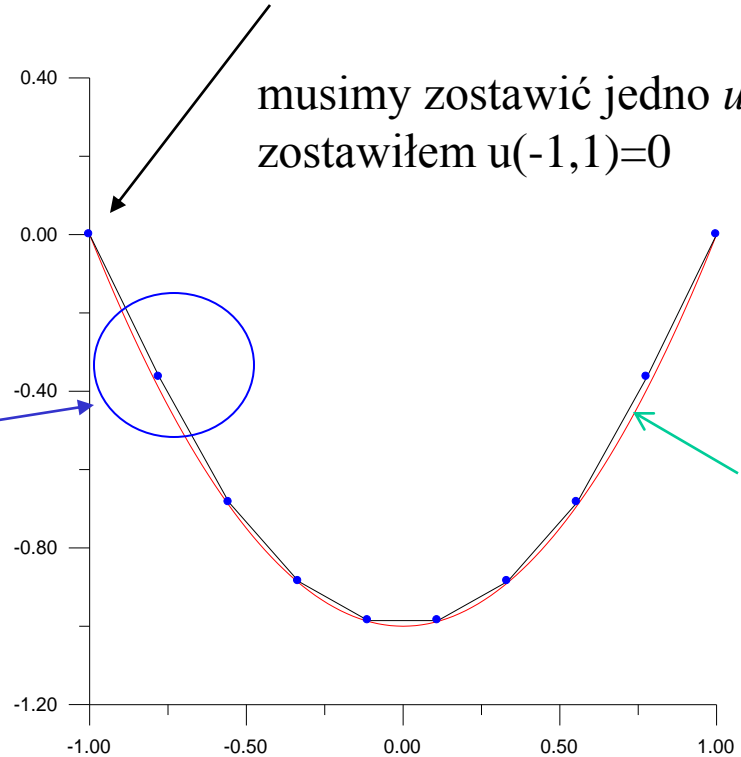
Reorganizujemy macierze  
 przekładając wiersze  
 z jednej do drugiej

układ równań: macierz D,  
 w której pierwszą kolumnę  
 bierzemy z G ze zmienionym  
 znakiem, resztę z H  
 w C: pierwsza kolumna z  
 H ze zmienionym znakiem  
 reszta z G

$$y = (u_1, q_2, q_3, \dots)$$

$$x = (q_1, u_2, u_3, \dots)$$

Rozbieżność  
 w wartościach  
 u w węzle



musimy zostawić jedno u na brzegu  
 zostawiłem  $u(-1, 1) = 0$

Wyniki dla u  
 Wzdłuż górnego brzegu

## Reguła sum

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gq}$$

$$h_k^{in} = \int \Phi_k(\mathbf{r}) \dot{q}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Gamma_n$$

$$g_k^{in} = \int \Phi_k(\mathbf{r}) \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Gamma_n$$

jeśli  $u$  spełnia równanie Laplace'a,  $u+c$  również, ponadto  $H$  i  $G$  bez zmian

$$\begin{array}{l} \mathbf{Hu} = \mathbf{Gq} \\ \mathbf{Hu} + \mathbf{H}[c] = \mathbf{Gq} \end{array} \longrightarrow \sum_j H_{ij} = 0$$

dla każdego  $i$

*wektor o stałych wyrazach*

użyteczność:

dla krzywoliniowych elementów najtrudniejsza jest policzenie diagonalnych wkładów do  $H$  - gdzie całka jest najwolniej zbieżna (dla krzywoliniowych elementów)

$$H_{ii} = - \sum_{i \neq j} H_{ij}$$

Ale: do jej oszacowania można użyć pozostałych elementów, które szybciej zbieżne]

co więcej: nie musimy martwić się o wyznaczenie  $c_i$

druga reguła sum (równanie jednorodne)

2) podobnie jeśli  $\dot{u}$  rozwiązanie fundamentalne to  $\dot{u} + c$  również

$$g_k^{in} = \int \Phi_k(\mathbf{r}) \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) d\Gamma_n$$

macierz

suma funkcji kształtu dla każdego elementu = 1  
stąd po złożeniu każdy elementy macierzy G rośnie o c

$$Hu = Gq \quad \swarrow$$

$$Hu = (G + [c])q \quad \rightarrow \sum_i q_i = 0$$

$H$  nie ulega zmianie,  
bo w liczeniu elementów  
 $h$  wykorzystywana  
jest tylko pochodna normalna  $\dot{u}$

*należy czytać: zdyskretyzowana forma prawa Gaussa  
strumień zero, jeśli źródeł brak*

$$\oint \nabla u dS = 0$$

~~$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} (\dot{u}q - \dot{q}u) d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{u}\rho(x) d\Omega$$~~

użyteczność drugiej  
reguły sum w powyższej  
formie ograniczona  
do równania jednorodnego

Wersja metody elementów brzegowych dla równania niejednorodnego:

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} (\dot{u}q - \dot{q}u) d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{u}\rho(x)d\Omega$$

$$c_i u_i = \sum_{n=1}^N \int \dot{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \sum_k q(n, k) \Phi_k(\mathbf{r}) d\Gamma_n$$

$$- \sum_{n=1}^N \int \dot{q}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \sum_k u(n, k) \Phi_k(\mathbf{r}) d\Gamma_n$$

$$- \int_{\Omega} \dot{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \rho(\mathbf{r}) d\Omega \longleftarrow \text{całka objętościowa}$$

$$\mathbf{H}u = \mathbf{G}q + \mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}_i = - \int_{\Omega} \dot{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \rho(\mathbf{r}) d\Omega$$

uwaga: pierwsza reguła sum, przeżywa

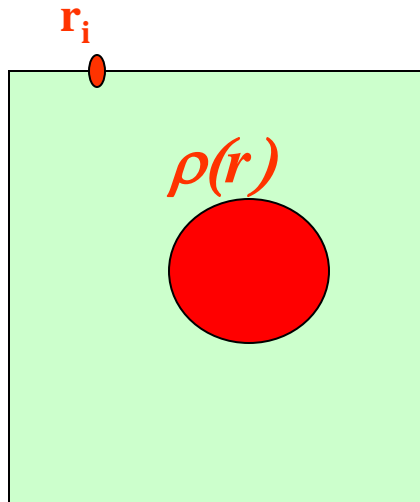
$$\mathbf{H}u = \mathbf{G}q + \mathbf{n}$$

$$\mathbf{H}u + \mathbf{H}[c] = \mathbf{G}q + \mathbf{n}$$

$$\longrightarrow \sum_i H_{ij} = 0$$

Całkowanie niejednorodności z rozwiązaniem fundamentalnym (osobliwością):

$$\mathbf{n}_i = - \int_{\Omega} \dot{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \rho(\mathbf{r}) d\Omega$$

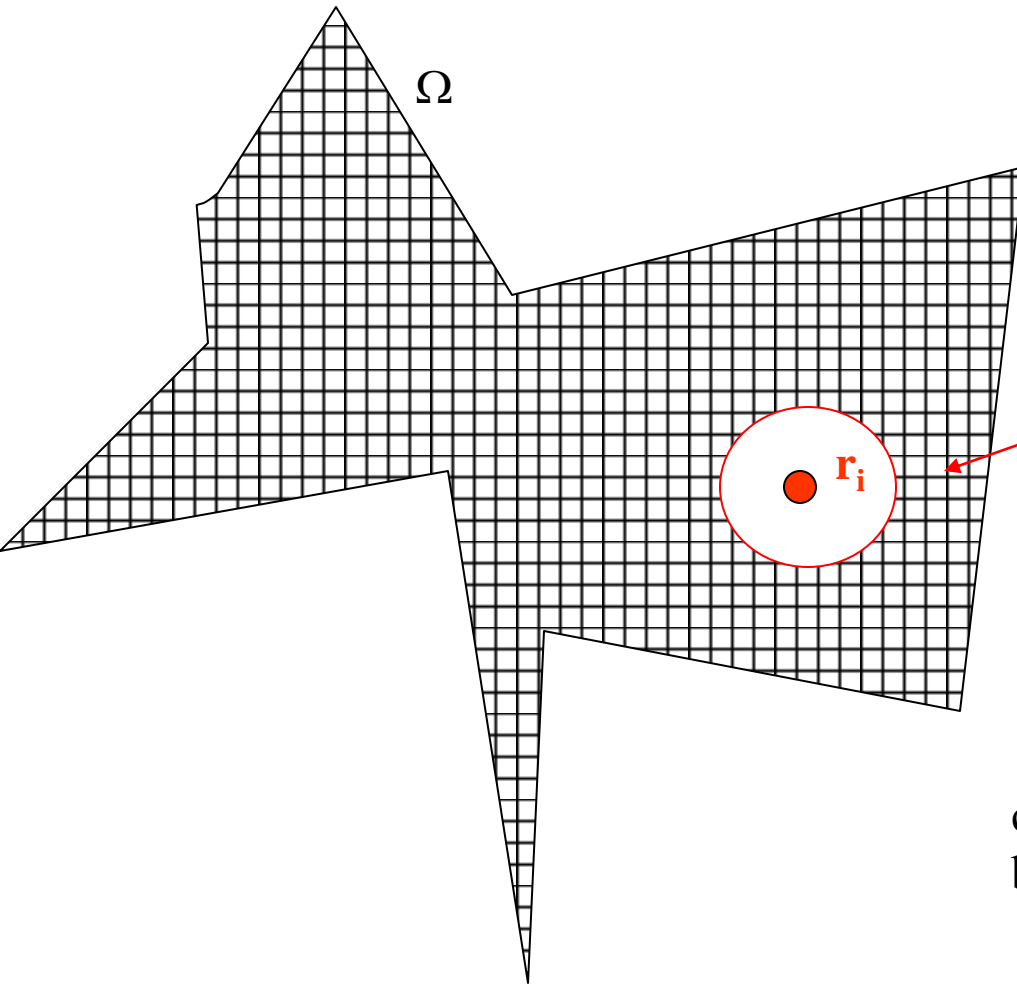


przy rozwiązywaniu równań dla „drugiego warunku brzegowego” nie ma problemu, gdy niejednorodność  $\rho(\mathbf{r})$  nie leży na brzegu lub gdy gęstość ładunku jest skończona (całkujemy wtedy logarytm \* skończona funkcja – jak elementy macierzy  $g$ )

problem z osobliwością rozwiązania fundamentalnego wewnątrz  $\Omega$  pojawia się gdy poszukujemy rozwiązania wewnątrz obszaru całkowania [współrzędne kartezjańskie słabo się do całkowania wtedy nadają]

$$u_i = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 q(n, k) g_k^{in} - \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 u(n, k) h_k^{in} + \mathbf{n}_i$$

... gdy poszukujemy rozwiązania  
wewnątrz obszaru całkowania



$$\mathbf{n}_i = \int_{\Omega} \dot{u}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \rho(\mathbf{r}) d\Omega$$

z objętości całkowania  
wycinamy kulę (koło)  
o zadanym promieniu  
i środku w osobliwości

$$\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$$

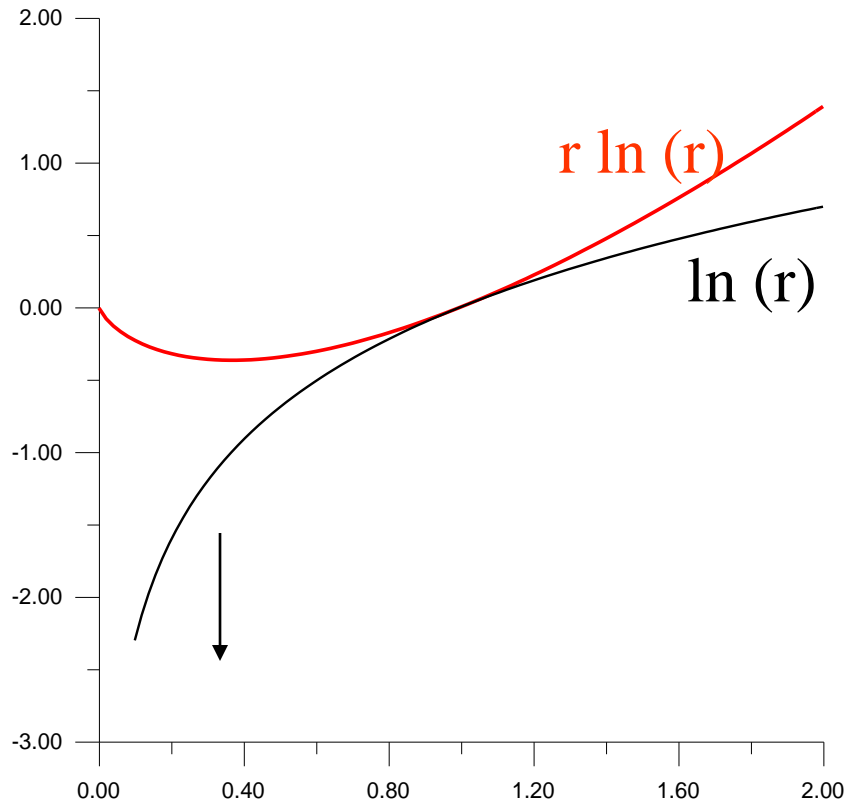
całkujemy we współrzędnych  
biegunowych względem osobliwości

całka po kole:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r \rho(r, \phi) \ln |r| dr$$

jacobian likwiduje osobliwość

## jakobian likwiduje osobliwość w źródle



podobnie 3D:  
jakobian  $\rightarrow r^2$   $1/r$   
fcja Greena

całka po kole: 
$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r \rho(r, \phi) \ln |r| dr$$

gdy źródło na brzegu: całkowanie po kącie węższe, lub  $R(\phi)$

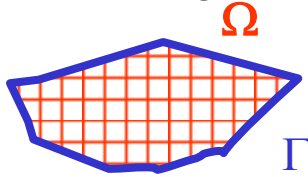


## MES

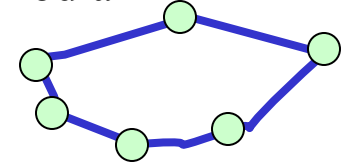
## porównanie

## MEB

Elementy generowane na całym obszarze całkowania  $\Omega$  równania różniczkowego



Elementy generowane tylko na brzegu  $\Gamma$  (wymiar o jeden niżej).  
Ale: niejednorodność należy wyciąkować po całym obszarze *jej występowania*.  
[co może być łatwe, jeśli np. źródła punktowe]



Otrzymujemy rozwiązanie na całym  $\Omega$

1) Najpierw rozwiązujemy równanie na „drugi wb” na brzegu  $\Gamma$

2) Następnie liczymy rozwiązanie *tylko* w punktach wnętrza które nas interesują

Rozwiązywane jest równanie przybliżone (słaba forma równania z wagami = funkcjami bazowymi).  
Jeśli dyskretyzacja brzegu dokładna: również warunek brzegowy wstawimy dokładny (ale w ograniczonej bazie)

Rozwiązywane jest równanie dokładne (słaba forma równania z funkcją Greena jako wagą = jest dokładnym odpowiednikiem oryginalnego równania). Ale: warunki brzegowe są wstawiane w sposób przybliżony.

## MES

generowane są macierze  
duże rzadkie i symetryczne  
(operator samosprężony)

## MEB

macierze gęste i niesymetryczne, ale  
mniejsze

o tym, która metoda produkuje łatwiejsze w eksploatacji  
macierze decyduje stosunek objętości do powierzchni,  
gdy duży MEB preferowana. MEB stosowana dla nieskończonych obszarów

elementy macierzowe całkowne  
łatwo: (macierz sztywności  
= analitycznie lub dokładnie  
numerycznie [całki z wielomianu])  
wektor sztywności: nieco trudniej

funkcje podcałkowe są osobliwe  
całkowanie numeryczne jest trudne

stosowalność: bardzo szeroka,  
z problemami nieliniowymi włącznie

o stosowalności decyduje znajomość  
rozwiązania fundamentalnego,  
są równania liniowe, w których o nie trudno

Przykład: zastosowanie swobodnej fcji Greena  
w rachunkach analitycznych, problem warunków brzegowych

O delcie Diraca i zupełności fcji własnych operatorów samosprężonych

$$L\phi_n = \lambda_n\phi_n$$

zał:  $\phi_n$  unormowane

dla dowolnej  $f$

$$f(x) = \sum_n c_n \phi_n(x) \quad \text{z} \quad c_n = \int_a^b f(x) \phi_n(x) dx$$

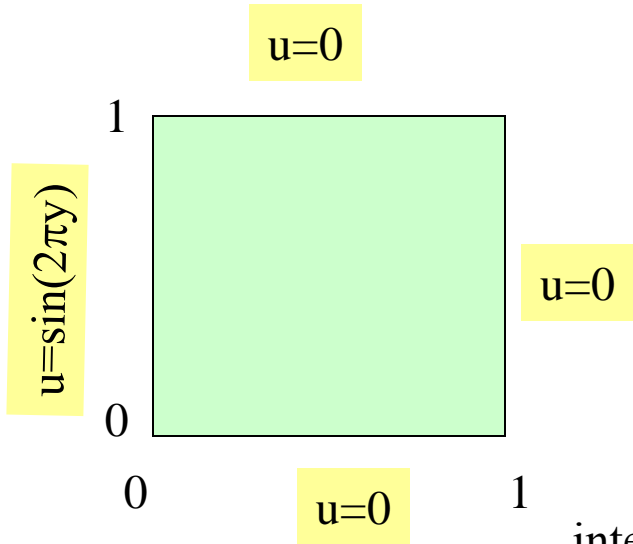
w szczególności

$$\delta(x - t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(x) \quad c_n = \int_a^b \delta(x - t) \phi_n(x) dx$$

$$c_n = \phi_n(t)$$

$$\delta(x - t) = \sum_n \phi_n(t) \phi_n(x)$$

Przykład: zastosowanie swobodnej fcji Greena w rachunkach analitycznych



$$\nabla^2 u = 0$$

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} (\dot{u}q - \dot{q}u) d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{u}\rho(x) d\Omega$$

interesuje nas tylko rozwiązanie wewnątrz obszaru całkowania więc  $c_i=1$

$$\nabla^2 \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

poszukamy rozwiązania fundamentalnego, które znika na brzegach pudła

rozwiązać można separując zmienne:

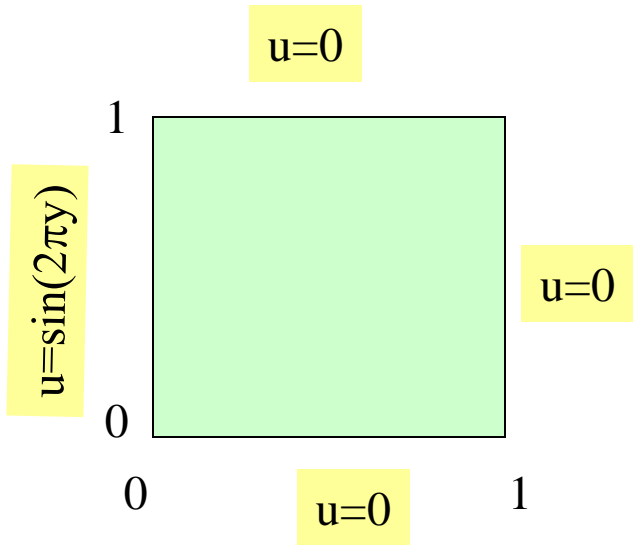
$$u = \sin(2\pi y) \frac{\sinh(2\pi(1-x))}{\sinh(2\pi)}$$

Rozwiązania równania Laplace'a znikające na brzegach:

$$\phi_{mn} = 2 \sin(n\pi x) \sin(m\pi y)$$

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} (\dot{u}q - \dot{q}u) d\Gamma$$

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} (\dot{u}q - \dot{q}u) d\Gamma$$



$$\phi_{mn} = 2 \sin(n\pi x) \sin(m\pi y)$$

spróbujemy skonstruować fcję Greena dla  
Zerowych warunków brzegowych:

$$\dot{u}(x, y; x_i, y_i) = \sum_{mn} c_{mn}(x_i, y_i) \phi_{mn}(x, y)$$

$$\nabla^2 \dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

$$\delta(x - x_i, y - y_i) = \sum_{mn} \phi_{mn}(x_i, y_i) \phi_{mn}(x, y)$$

$$\sum_{mn} c_{mn}(x_i, y_i) \pi^2 (m^2 + n^2) \phi_{mn}(x, y) = + \sum_{mn} \phi_{mn}(x_i, y_i) \phi_{mn}(x, y)$$

fcje własne operatora samosprężonego: baza ortogonalna

$$c_{mn}(x_i, y_i) = \frac{1}{\pi^2(n^2 + m^2)} \phi_{mn}(x_i, y_i)$$

$$\phi_{mn} = 2 \sin(n\pi x) \sin(m\pi y)$$

$$\dot{u}(x, y; x_i, y_i) = \sum_{mn} c_{mn}(x_i, y_i) \phi_{mn}(x, y)$$

$$c_{mn}(x_i, y_i) = \frac{1}{\pi^2(n^2 + m^2)} \phi_{mn}(x_i, y_i)$$

$$\dot{u}(x, y; x_i, y_i) = \sum_{mn} \frac{4}{\pi^2(m^2 + n^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(n\pi y_i) \sin(m\pi x) \sin(n\pi y)$$

$$u(x_i, y_i) = - \int_{\Gamma} \dot{q} u(x, y) d\Gamma$$

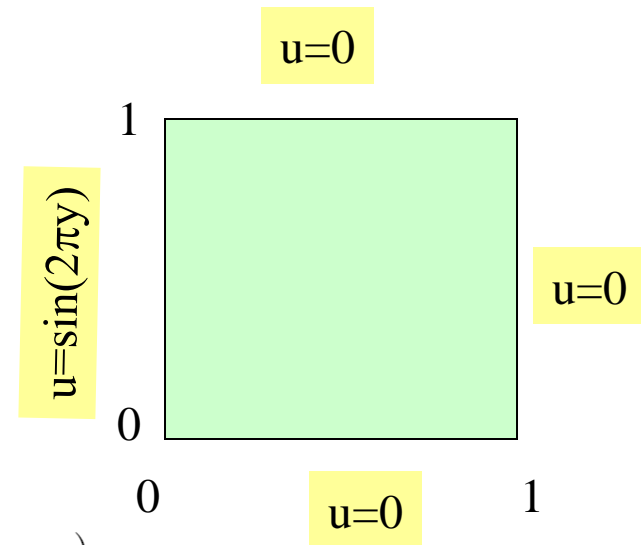
$$u(x_i, y_i) = - \int_0^1 \dot{q}(x=0, y) \sin(2\pi y) dy$$

$$\dot{q}(x=0, y) = - \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}(x=0, y)$$

(minus bo x=0 to brzeg lewy)

$$\dot{q}(x=0, y; x_i, y_i) = - \sum_{mn} \frac{4m\pi}{\pi^2(m^2 + n^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(n\pi y_i) \sin(n\pi y)$$

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} (\dot{u} q - \dot{q} u) d\Gamma + \int_{\Omega} \dot{u} \rho(x) d\Omega$$

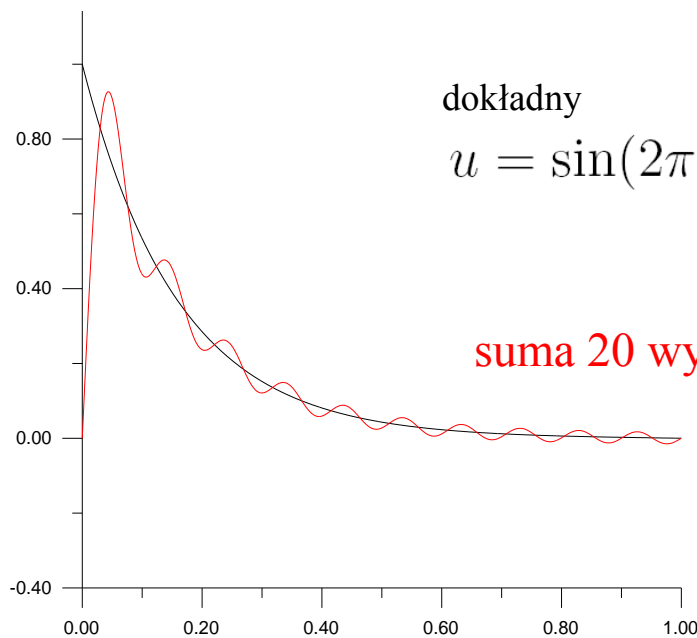
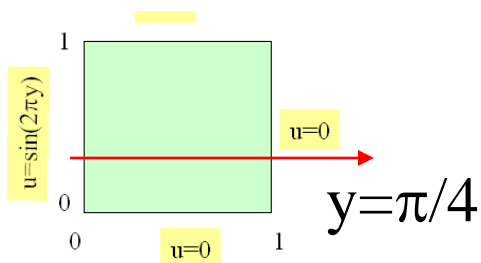


$$u(x_i, y_i) = - \int_0^1 \dot{q}(x=0, y) \sin(2\pi y) dy$$

$$\dot{q}(x=0, y; x_i, y_i) = - \sum_{mn} \frac{4m\pi}{\pi^2(m^2 + n^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(n\pi y_i) \sin(n\pi y)$$

$$u(x_i, y_i) = \sum_m \sum_n \frac{4m\pi}{\pi^2(m^2 + n^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(n\pi y_i) \frac{1}{2} \delta(n, 2)$$

$$u(x_i, y_i) = \sum_m \frac{2m\pi}{\pi^2(m^2 + 2^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(2\pi y_i)$$



dokładny

$$u = \sin(2\pi y) \frac{\sinh(2\pi(1-x))}{\sinh(2\pi)}$$

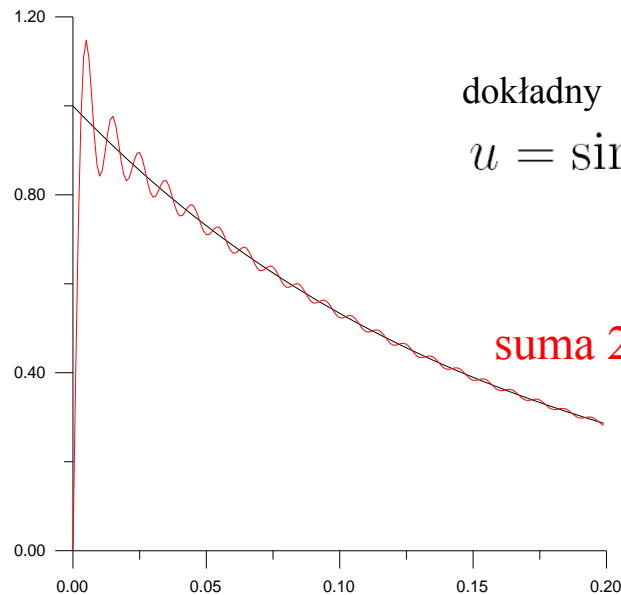
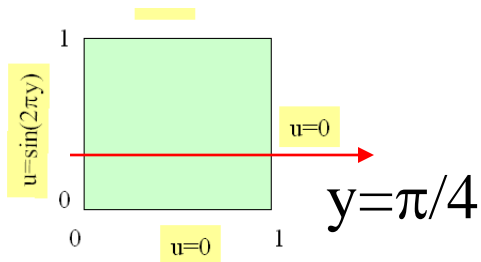
suma 20 wyrazów

$$u(x_i, y_i) = - \int_0^1 \dot{q}(x=0, y) \sin(2\pi y) dy$$

$$\dot{q}(x=0, y; x_i, y_i) = - \sum_{mn} \frac{4m\pi}{\pi^2(m^2 + n^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(n\pi y_i) \sin(n\pi y)$$

$$u(x_i, y_i) = \sum_m \sum_n \frac{4m\pi}{\pi^2(m^2 + n^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(n\pi y_i) \frac{1}{2} \delta(n, 2)$$

$$u(x_i, y_i) = \sum_m \frac{2m\pi}{\pi^2(m^2 + 2^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(2\pi y_i)$$



dokładny

$$u = \sin(2\pi y) \frac{\sinh(2\pi(1-x))}{\sinh(2\pi)}$$

suma 200 wyrazów

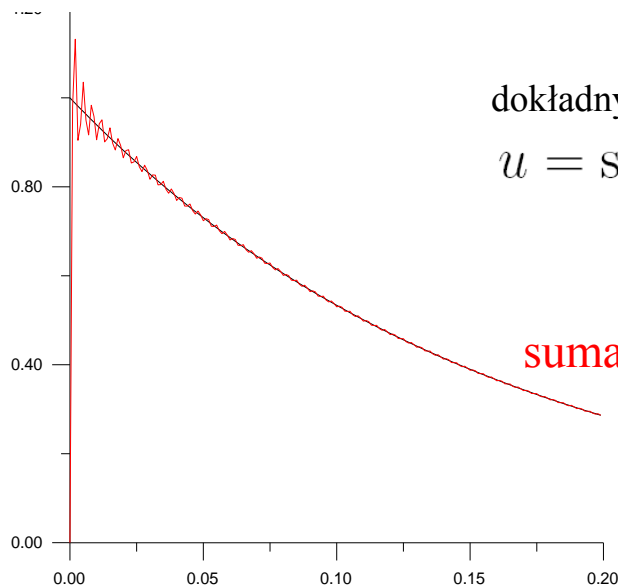
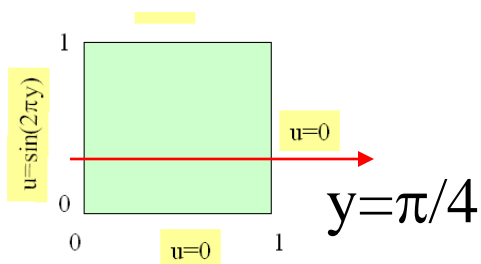


$$u(x_i, y_i) = - \int_0^1 \dot{q}(x=0, y) \sin(2\pi y) dy$$

$$\dot{q}(x=0, y; x_i, y_i) = - \sum_{mn} \frac{4m\pi}{\pi^2(m^2 + n^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(n\pi y_i) \sin(n\pi y)$$

$$u(x_i, y_i) = \sum_m \sum_n \frac{4m\pi}{\pi^2(m^2 + n^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(n\pi y_i) \frac{1}{2} \delta(n, 2)$$

$$u(x_i, y_i) = \sum_m \frac{2m\pi}{\pi^2(m^2 + 2^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(2\pi y_i)$$



dokładny

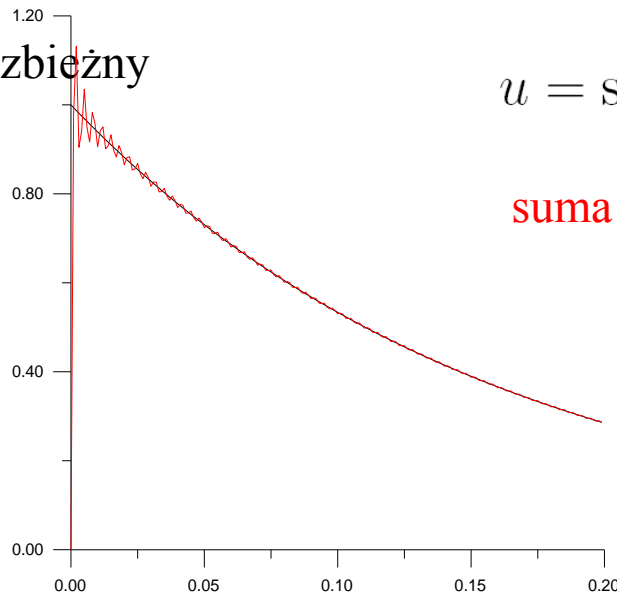
$$u = \sin(2\pi y) \frac{\sinh(2\pi(1-x))}{\sinh(2\pi)}$$

suma 600 wyrazów

$$u(x_i, y_i) = \sum_m \sum_n \frac{4m\pi}{\pi^2(m^2 + n^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(n\pi y_i) \frac{1}{2} \delta(n, 2)$$

$$u(x_i, y_i) = \sum_m \frac{2m\pi}{\pi^2(m^2 + 2^2)} \sin(m\pi x_i) \sin(2\pi y_i)$$

Szereg jest wolno zbieżny



$$u = \sin(2\pi y) \frac{\sinh(2\pi(1-x))}{\sinh(2\pi)}$$

suma 600 wyrazów

czasem wygodniej jest

pracować z kompaktową formą swobodnej funkcji Greena

$$\dot{u}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad \text{oraz z pełnym równaniem całkowym.}$$

$$c_i u(\mathbf{r}_i) = \int_{\Gamma} (\dot{u}q - \dot{q}u) d\Gamma -$$