Metoda różnic skończonych (finite difference method)

Z definicji pierwszą pochodną można przybliżać ilorazami różnicowymi:

do przodu (forward)

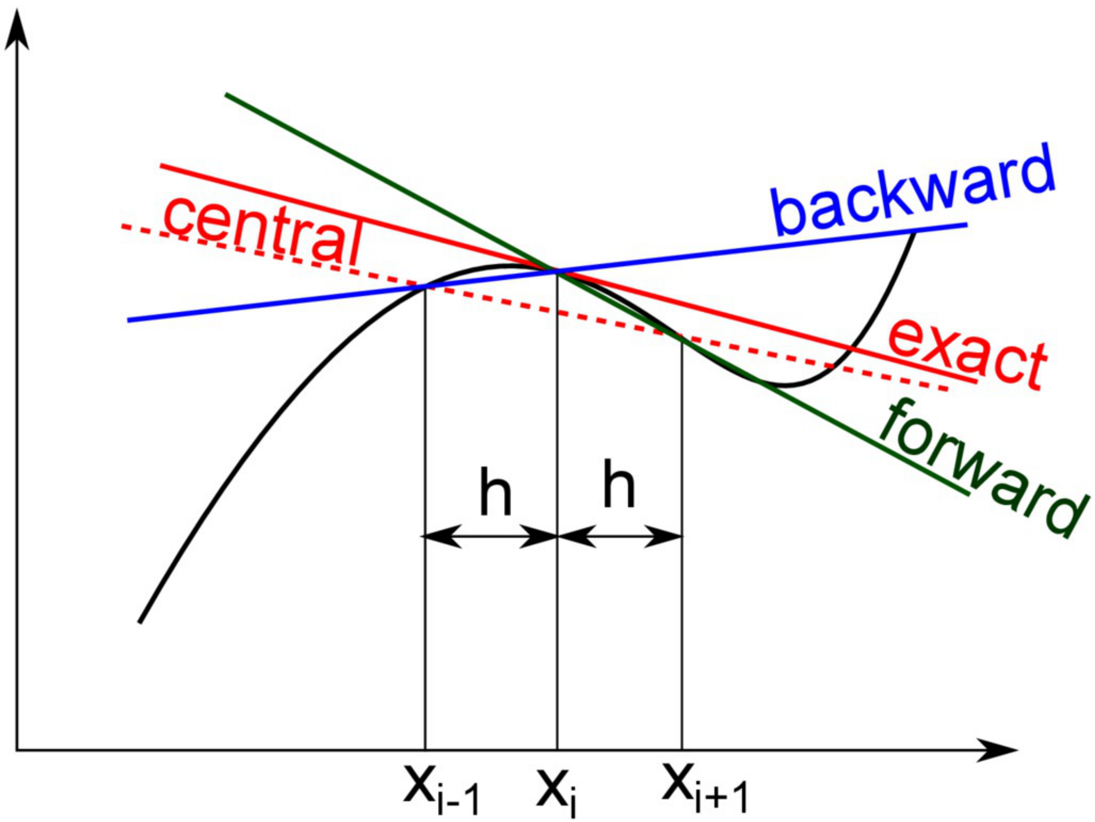
$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

wstecznym (backward)

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

symetrycznym (central)

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$



Generalnie pochodne przybliżamy ilorazami różnicowymi, które konstruujemy wykorzystując rozwinięcie funkcji w szereg Taylora.

Zakładamy że: $x_i = h \cdot i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$$f(x+\Delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \frac{\Delta^k}{k!}$$

Oznaczenia: $f^{(k)}(x) = \dfrac{d^k f(x)}{dx^k}$ $\qquad \Delta = \pm h, \pm 2h$

$$f(x+h) = f(x) + f^{(1)}\frac{h^1}{1!} + f^{(2)}\frac{h^2}{2!} + f^{(3)}\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}\frac{h^4}{4!} + O(h^5) \tag{1}$$

$$f(x-h) = f(x) - f^{(1)}\frac{h^1}{1!} + f^{(2)}\frac{h^2}{2!} - f^{(3)}\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}\frac{h^4}{4!} + O(h^5) \tag{2}$$

$$f(x+2h) = f(x) + f^{(1)}\frac{2h^1}{1!} + f^{(2)}\frac{4h^2}{2!} + f^{(3)}\frac{8h^3}{3!} + f^{(4)}\frac{16h^4}{4!} + O(h^5) \tag{3}$$

$$f(x-2h) = f(x) - f^{(1)}\frac{2h^1}{1!} + f^{(2)}\frac{4h^2}{2!} - f^{(3)}\frac{8h^3}{3!} + f^{(4)}\frac{16h^4}{4!} + O(h^5) \tag{4}$$

Pierwsza pochodna (symetryczna)

Odejmujemy (1-2) – przybliżenie dwypunktowe:

$$f^{(1)} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f^{(3)}\frac{h^2}{3!} + \dots$$

$$f^{(1)} \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

lub 8(1-2)-(3-4) – przybliżenie czteropunktowe:

$$f^{(1)} \approx \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} + O(h^4)$$

Dokładność wyższa niż dla wzoru dwupunktowego bo zbieramy informacje z czterech sąsiednich węzłów.

Druga pochodna (symetryczna)

Dodajemy (1+2) – przybliżenie trzypunktowe:

$$f^{(2)} \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + O(h^2)$$

Lub 16(1+2)-(3+4) – przybliżenie pięciopunktowe:

$$f^{(2)} \approx \frac{-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)}{12h^2} + O(h^4)$$

Pierwsza pochodna – ilorazy niesymetryczne (np. do warunków brzegowych)

z definicji

$$f^{(1)} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

lub 4(1)-3 (usuwamy 2 pochodną):

$$f^{(1)} \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + O(h^2)$$

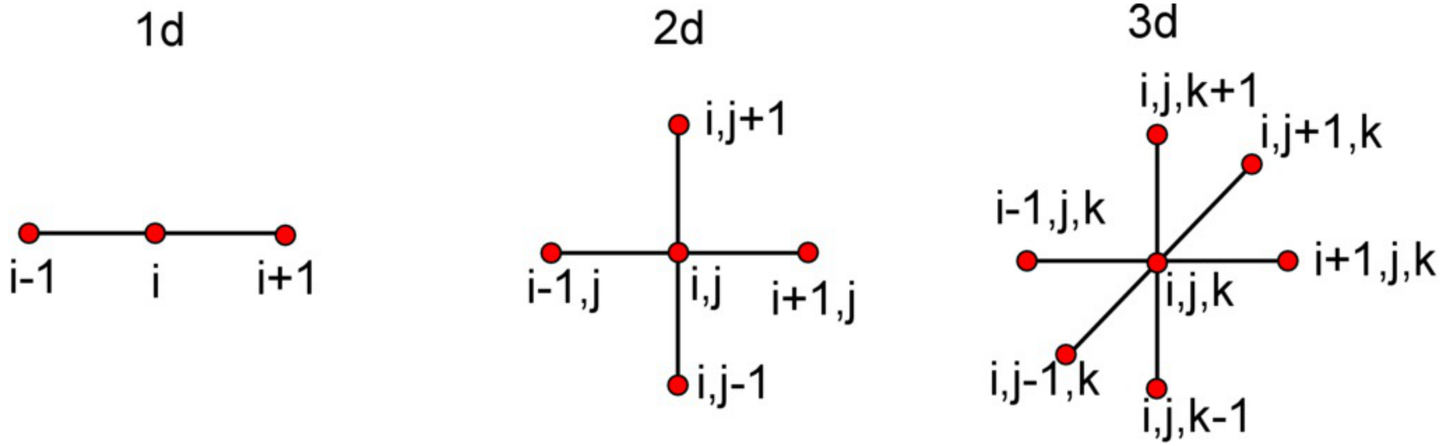
Druga pochodna – iloraz niesymetryczny

$$f^{(2)} \approx \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} + O(h)$$

Dostajemy gorsze przybliżenie bo nie kasują się wyrazy z 3 pochodną, a nadal bazujemy tylko na trzech węzłach.

Uwaga 1: w podobny sposób możemy skonstruować ilorazy niesymetryczne dla pochodnych liczonych wstecz.

Uwaga 2: ilorazy różnicowe skonstruowane dla węzłów nierównoodległych będą gorszymi przybliżeniami pochodnych ze względu na brak kasowania się pochodnych niższych rzędów



$$
\begin{array}{rcl}
 & 3d & \\
(i,j,k) & \rightarrow & l=(k-1)N_iN_j+(i-1)N_j+j \\
(i-1,j,k) & \rightarrow & l-N_j \\
(i,j-1,k) & \rightarrow & l-1 \\
(i,j+1,k) & \rightarrow & l+1 \\
(i+1,j,k) & \rightarrow & l+N_j \\
(i,j,k-1) & \rightarrow & l-N_iN_j \\
(i,j,k+1) & \rightarrow & l+N_iN_j
\end{array}
$$