

Ustaliliśmy, że do rozwiązywania równania adwekcji lepiej nadaje się mniej dokładny schemat upwind niż ten z ilorazem centralnym

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} \quad \alpha = vdt/dx$$

upwind: $U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$ stabilny, stabilny bezwzględnie

centralny: $U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$ stabilny, ale niestabilny bezwzględnie

warunek wystarczający dla stabilności bezwzględnej wg. normy max:
wszystkie wagi przy wartościach z poprzedniego kroku dodatnie i sumujące się do jedynki

w centralnym = sumują się do jedynki, ale nie są dodatnie

$$U_j^{n+1} = \underset{\uparrow}{U_j^n} - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

zastąpić średnią arytmetyczną sąsiadów

Ustaliliśmy, że do rozwiązywania równania adwekcji lepiej nadaje się mniej dokładny schemat upwind niż ten z ilorazem centralnym

upwind: $U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$

centralny: $U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$

warunek wystarczający dla stabilności wg. normy max:
wszystkie c dodatnie i sumują się do jedynki

w centralnym = sumują się do jedynki, ale nie są dodatnie

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

zastąpić średnią arytmetyczną sąsiadów

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

schemat Laxa-Friedrichsa

$$U_j^{n+1} = U_{j+1}^n \frac{1 - \alpha}{2} + U_{j-1}^n \frac{1 + \alpha}{2}$$

dla $\alpha \in (-1, 1)$ spełnione WW
stabilności bezwzględnej
w sensie normy max

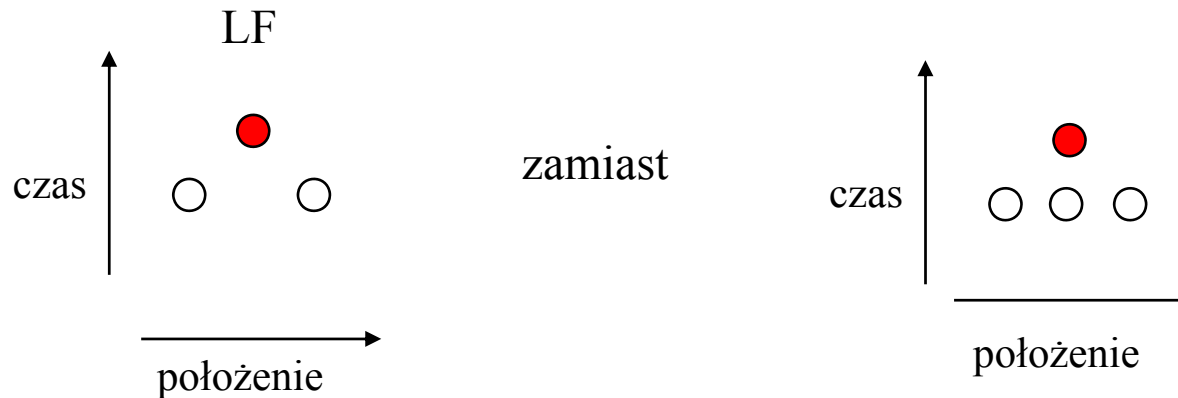
czy manewr ze średnią arytmetyczną nie rozpóinja metody?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u(j, n + 1) = -v\Delta t \frac{u(j + 1, n) - u(j - 1, n)}{2\Delta x} + u(j, n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$u(j, n) = \frac{1}{2} (u(j - 1, n) + u(j + 1, n)) + O(\Delta x)$$

Lokalny błąd przestrzenny nabiera niższego rzędu, ale metoda pozostaje spójna. Obniżamy rząd dokładności przestrzennej zyskując stabilność bezwzględną.



metoda Laxa-Friedrichsa : analiza von Neumanna

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

$$U_k^0(x_j = j\Delta x) = \sum_k A_k^0 \exp(ik\Delta x)$$

$$A_k^{n+1} = \left[\frac{\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x)}{2} - \frac{\alpha}{2} (\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)) \right] A_k^n$$

$$M_k = \cos(k\Delta x) - i\alpha \sin(k\Delta x)$$

$$|M_k|^2 = \cos^2(k\Delta x) + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)$$

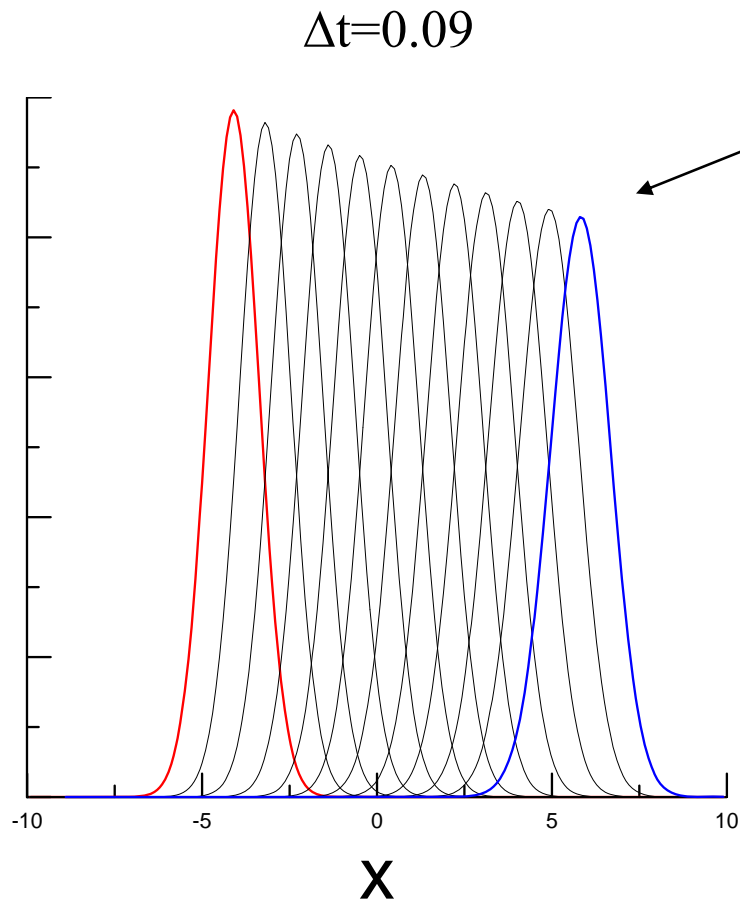
$$|M_k|^2 \leq 1 \quad \text{gdy} \quad \alpha^2 \leq 1$$

Kryterium CFL !

Uwaga: metoda LF jest bzwz. stabilna
niezależnie od znaku v !

schemat upwind wymagał dodatniego v

Metoda Laxa-Friedrichsa = zastosujmy

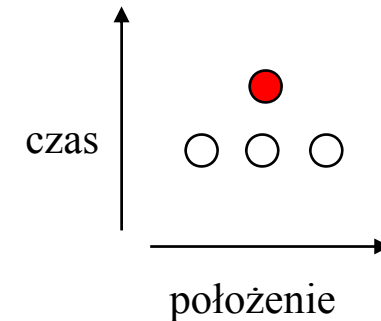


stabilna (uniknęliśmy eksplozji),
ale pakiet nie zachowuje się jak powinien.

niebieski z czerwonego rozplynał się
(większa szerokość kosztem wysokości)
dyfuzja numeryczna

schemat Laxa-Wendroffa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{a})$$



jak zmienia się z czasem wartość rozwiązania w punkcie x_j :

$$u(x_j, t + \Delta t) = u(x_j, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x_j, t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t} + O(\Delta t^3)$$

pochodne czasowe zastępujemy przestrzennymi zgodnie z równaniem (a)

$$u(x_j, t + \Delta t) = u(x_j, t) - v \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_j, t} + v^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t} + O(\Delta t^3)$$

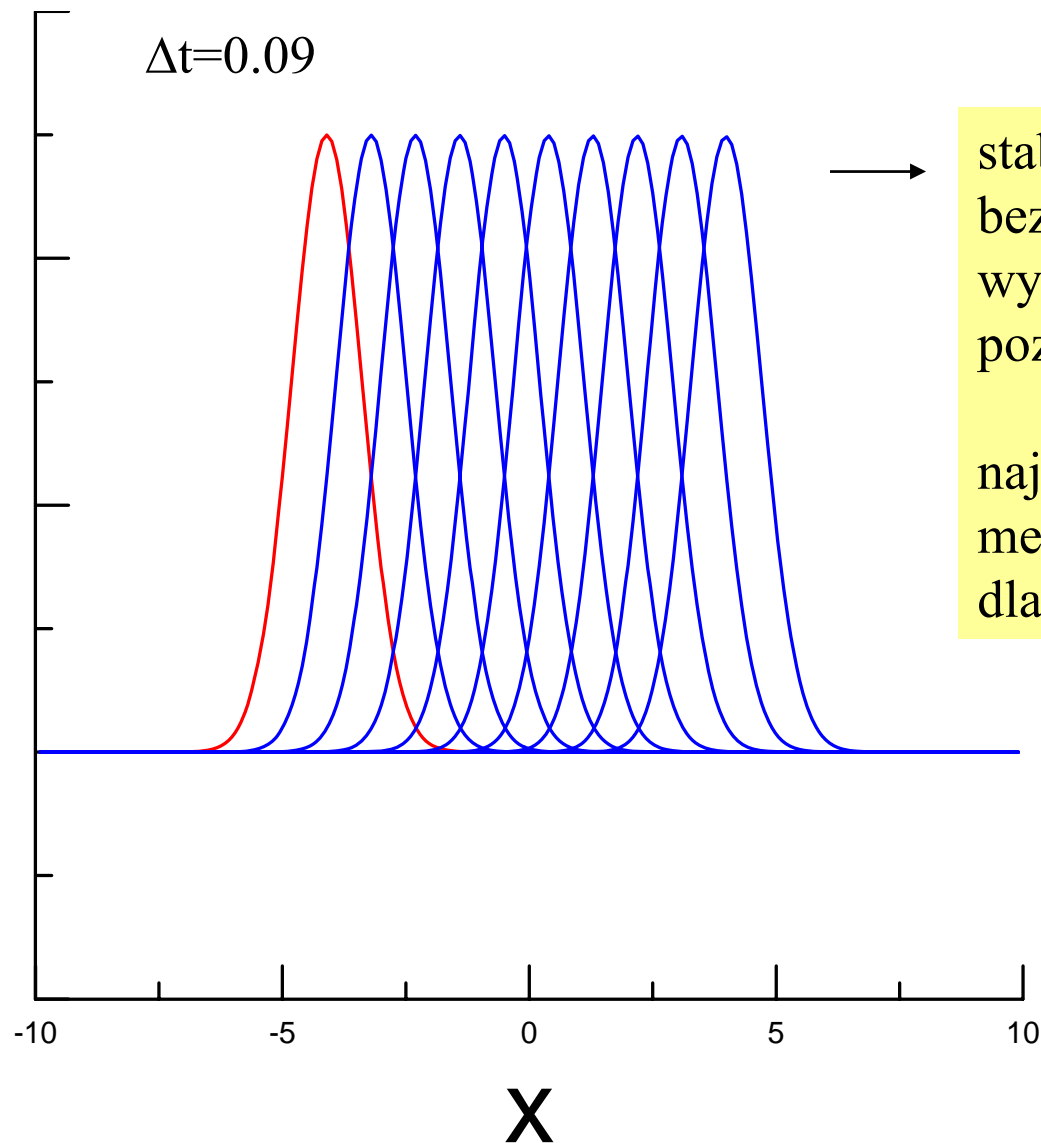
następnie pochodne przestrzenne wprowadzamy centralnymi ilorazami pochodnych:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n - 2U_j^n) \quad \text{błąd p: } O(\Delta x^2)$$

mamy: $O(\Delta x^2)$ i $O(\Delta t^3)$

zamiast $O(\Delta x)$ i $O(\Delta t^2)$ jak dla LF, lub upwind

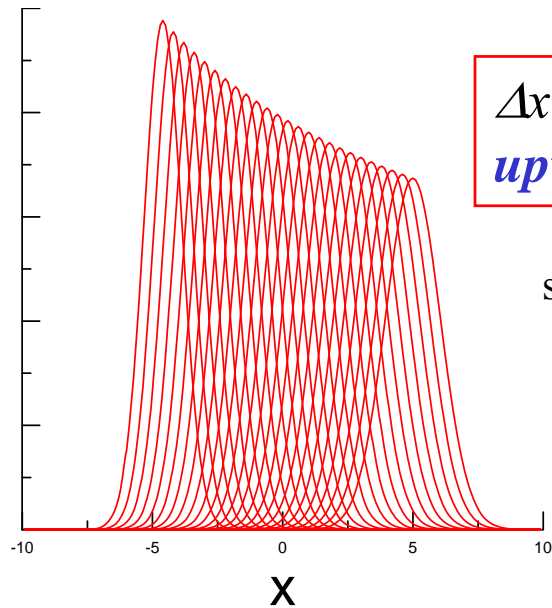
Wynik:



→ stabilna
bez *widocznej* dyfuzji
wyższa dokładność niż wszystkie
pozostałe

najlepsza z jawnych
metod jednowymiarowych
dla równania adwekcji

Dyfuzja numeryczna dla jawnych schematów jednopoziomowych



$\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.04$
upwind $\alpha = 0.4$

stabilny bezwzględnie ale pakiet się rozplywa
 - dyfuzja numeryczna

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha)U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

$$u_t + vu_x = 0$$

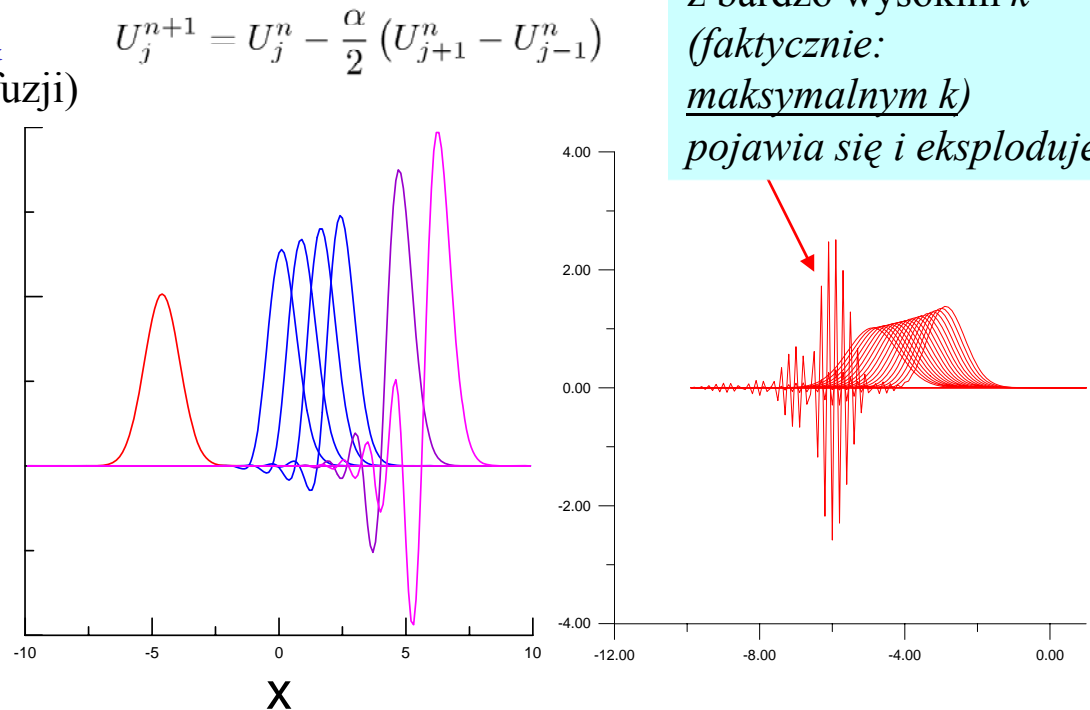
rozwiązanie
 $u = f(x - vt)$

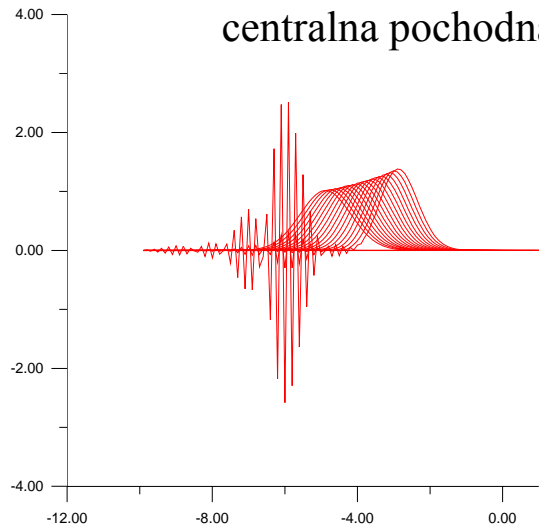
oscylacja: $\cos(kx)g(x)$,
 z bardzo wysokim k
 (faktycznie:
maksymalnym k)
 pojawia się i eksploduje

metoda z centralną pochodną przestrzenną

- 1) pakiet się lokalizuje (przeciwnie do dyfuzji)
- 2) za pakietem wyrasta szybka oscylacja
- 3) ... która jest natychmiast wzmacniana i eksploduje

$\Delta t = 0.04$
 $\alpha = 0.4$

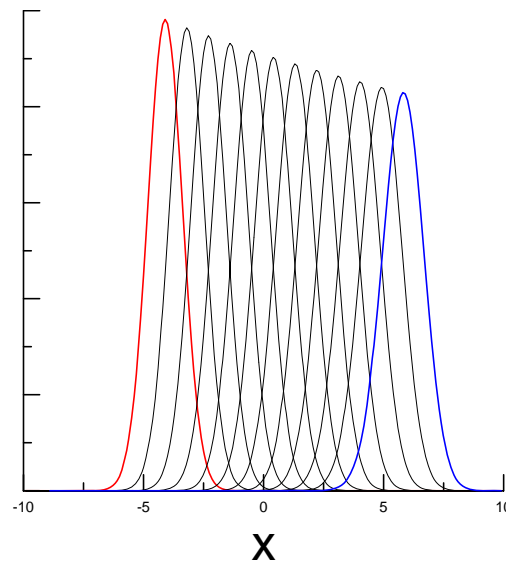




$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

modyfikacja Laxa-Friedrichsa

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$



stabilność,
ale z numeryczną dyfuzją w bonusie

Dyfuzja numeryczna dla schematów jawnych jednopoziomowych

równanie adwekcji

$$u_t + v u_x = 0 \longrightarrow$$

$$u(x, 0) = \exp(2\pi i k x)$$

$$u(x, t) = \exp(2\pi i k (x - vt))$$

wszystkie poznane schematy można uznać za przybliżenie różnicowe również **równania adwekcji-dyfuzji**:

$$u_t + v u_x = \sigma u_{xx}$$

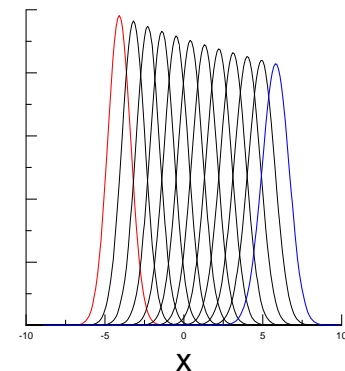


człon dyfuzyjny (zwany również dysypatywnym)

$$u(x, 0) = \exp(2\pi i k x)$$

$$u(x, t) = \exp(-4\pi^2 \sigma k^2 t) \exp(2\pi i k (x - vt))$$

interpretacja: składowa w rozwinięciu Fouriera zanika tym szybciej im wyższy jest wektor falowy k
(tym szybciej im większa jest zmienność przestrzenna fali)



Dyfuzja numeryczna dla schematów jawnych *upwind*

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n \quad \leftarrow \quad u_t + v u_x = 0$$

$$u_t + v u_x = \sigma u_{xx}$$

centralne przestrzenne ilorazy różnicowe:
a czasowy przedni

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2} (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) - \frac{v \Delta t}{2\Delta x} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

chcemy zrobić z tego przepisus schemat *upwind*: zlikwidujemy punkt $j+1$

$$\frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{v \Delta t}{2\Delta x} = \alpha/2$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\alpha}{2} (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

$$\sigma = \Delta x v / 2$$

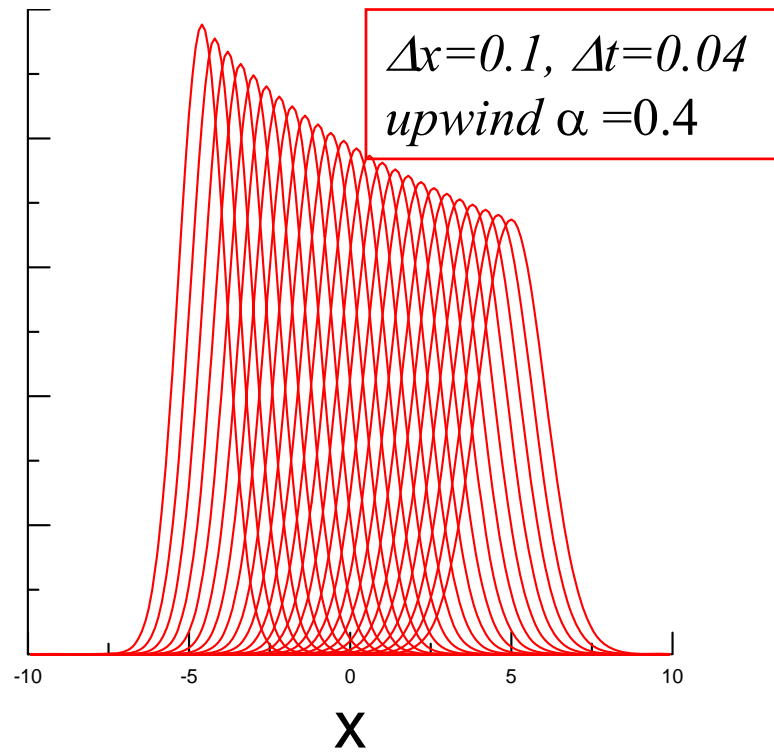
współczynnik dyfuzji numerycznej

= *upwind*

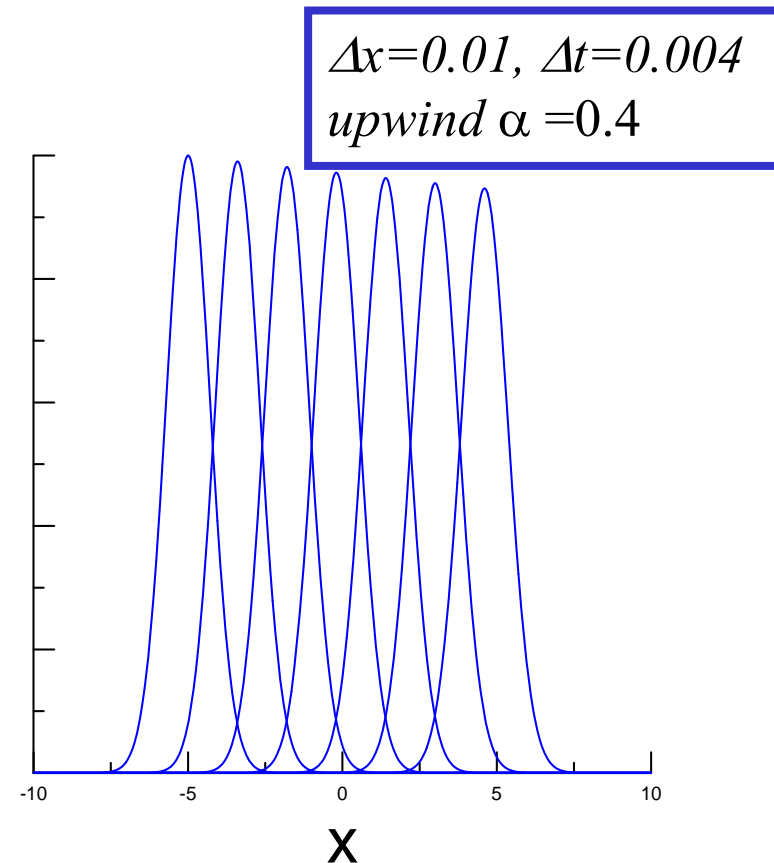
wniosek 1: *upwind* jest spójny z równaniem adwekcji-dyfuzji ze współczynnikiem dyfuzji $\sigma = \Delta x v / 2$

wniosek 2: dla *upwind* numeryczna dyfuzja jest mniej widoczna dla gęstszej siatki przestrzennej

wniosek 3: dla *upwind* krok czasowy nie zmienia dyfuzji numerycznej

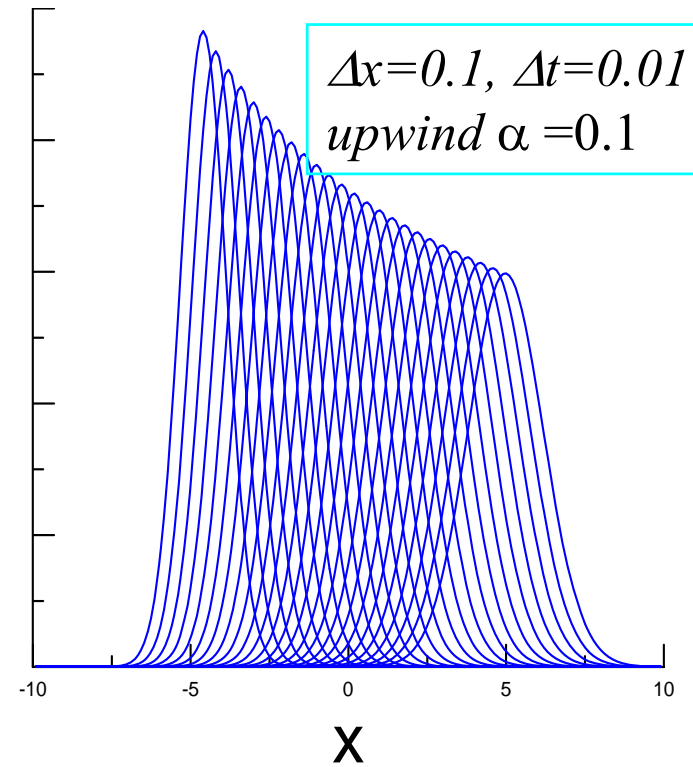
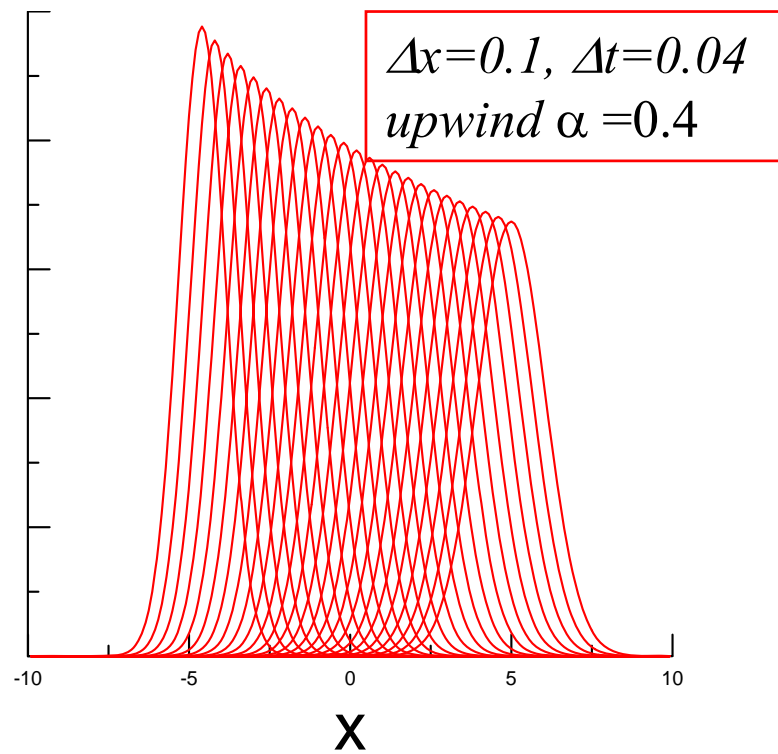


$$\sigma = \Delta x v / 2$$



dla *upwind*

wniosek 2: numeryczna dyfuzja jest mniej widoczna dla gęstszej siatki przestrzennej



$$\sigma = \Delta x v / 2$$

wniosek 3: dla *upwind* krok czasowy nie zmienia dyfuzji numerycznej

Dyfuzja numeryczna dla schematów jawnych: *upwind*

upwind:
$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

spójny z dwoma równaniami;

adwekcji

$$u_t + v u_x = 0$$

adwekcji - dyfuzji

$$\sigma = v \Delta x / 2$$

$$u_t + v u_x = \sigma u_{xx}$$

$$u(x, t) = \exp(-4\pi^2 \sigma k^2 t) \exp(2\pi i k (x - vt))$$

- 1) czynnik dyfuzyjny: gasi wyższe składowe (k) generowane przez centralny iloraz pochodnej
- 2) dyfuzja jest sztuczna bo współczynnik σ zależy od parametrów schematu numerycznego
- 3) rozwiązanie będzie dobrym przybliżeniem adwekcji, jeśli σ małe

metoda jest zbieżna do rozwiązania równania adwekcji – gdy obydwa kroki (czasowy i przestrzenny) schodzą do zera – znika dyfuzja numeryczna

zaniedbywalność dyfuzji numerycznej:

$$\sigma = \Delta x v \ll 2 : \text{ wtedy gdy } \Delta x \ll 2/v \text{ (mały krok przestrzenny)}$$

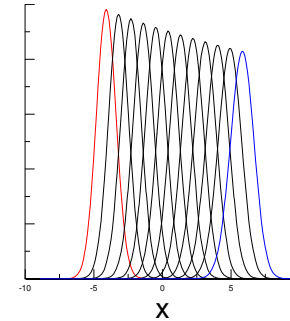
dodatkowo; kryterium zbieżności CFL: $v \Delta t \leq \Delta x$ (czasowy ma być jeszcze mniejszy)

Dyfuzja numeryczna dla schematów jawnych – LF

$$u_t + v u_x = 0$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \quad \text{centralny, niestabilny, ratowany uśrednieniem pierwszego wyrazu po sąsiadach}$$

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \quad \leftarrow \text{LF}$$



$$u_t + v u_x = \sigma u_{xx}$$

centralne ilorazy różnicowe:

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2} (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) - \frac{v \Delta t}{2\Delta x} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

LF odpowiada powyższemu schematowi jeśli $\sigma \Delta t / \Delta x^2 = 1/2$

LF spójna z równaniem adwekcji-dyfuzji dla $\sigma = \Delta x^2 / 2 \Delta t$

mała dyfuzja numeryczna;

$$\sigma = \Delta x^2 / 2 \Delta t \ll 1 \quad \longrightarrow \quad \Delta t \gg \Delta x^2 / 2$$

ale kryterium CFL: $v \Delta t / \Delta x \leq 1 \quad \longrightarrow \quad \Delta t \leq \Delta x / v$ (warunek zbieżności - stabilności)

warunki są przeciwstawne (ale nie sprzeczne), raczej trudne do spełnienia

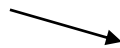
schemat LW: błąd $O(\Delta x^2)$, $O(\Delta t^3)$ [dla por. upwind/LF – $O(\Delta x)$, $O(\Delta t^2)$]

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n - 2U_j^n)$$

równanie AD

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2} (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) - \frac{v \Delta t}{2 \Delta x} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

dla LW: spójny z równaniem dyfuzji adwekcji dla $\alpha^2/2 = \sigma \Delta t / \Delta x^2$



$$\sigma = v^2 \Delta t / 2$$

$$\sigma \ll 1$$

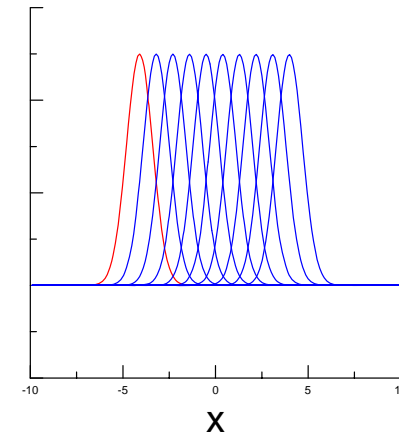


$$\Delta t \ll 2 / v^2$$

oraz $\Delta t \leq \Delta x / v$

CFL – dają się pogodzić

dla LW w przeciwieństwie do poprzednich metod zachowanie kształtu nie wymaga drobnego Δx



Podsumowanie dyfuzji numerycznej:

ogólna postać jawnego schematu jednopoziomowego

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\beta}{2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n),$$

β wyznacza σ :

$$\sigma = \Delta x^2 \Delta t \beta / 2$$

centralny	$\beta=0,$	$\sigma=0$
LW	$\beta=\alpha^2,$	$\sigma=v^2 \Delta t/2$
LF	$\beta=1,$	$\sigma=\Delta x^2/2 \Delta t$
<i>upwind</i>	$\beta=\alpha,$	$\sigma=v \Delta x/2$

Wniosek:

Wszystkie bezwzględnie stabilne jednokrokowe schematy różnicowe dla równania adwekcji zawierają element numerycznej dyfuzji. (centralny nie zawiera i jest bżwz niestabilny)

w tym sensie: dyfuzja numeryczna wprowadza bezwzględną stabilność:
zapobiega wzmacnianiu składowych o wysokich częstościach przestrzennych

Schemat jest dobry jeśli możemy zminimalizować jej wpływ bez utraty stabilności.
na pewno potrafimy dla *upwind* i *LW*.

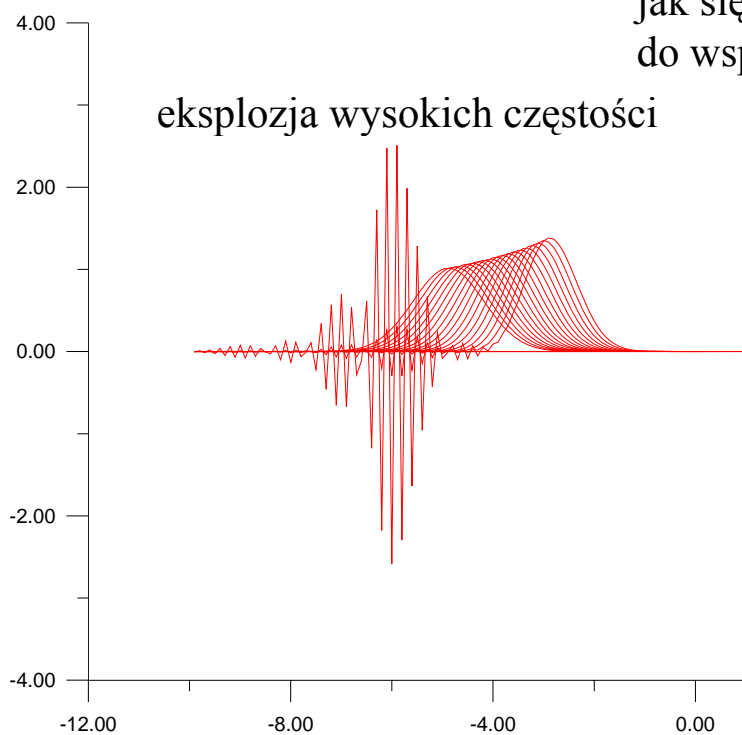
zobaczymy, że dla jawnego schematu dwupoziomowego możliwa jest stabilność bez dyfuzji (*leapfrog*)

współczynnik wzmocnienia w **przestrzeni wektora falowego**:

$$u_t + vu_x = 0$$

jak się ma częstość oscylacji przestrzennych
do współczynnika wzmocnienia

eksplozja wysokich częstości



współczynnik wzmocnienia w **przestrzeni wektora falowego**:


przerobić
na $k\Delta x$

$$u_t + vu_x = 0$$

schemat ogólny z czynnikiem dyfuzyjnym:

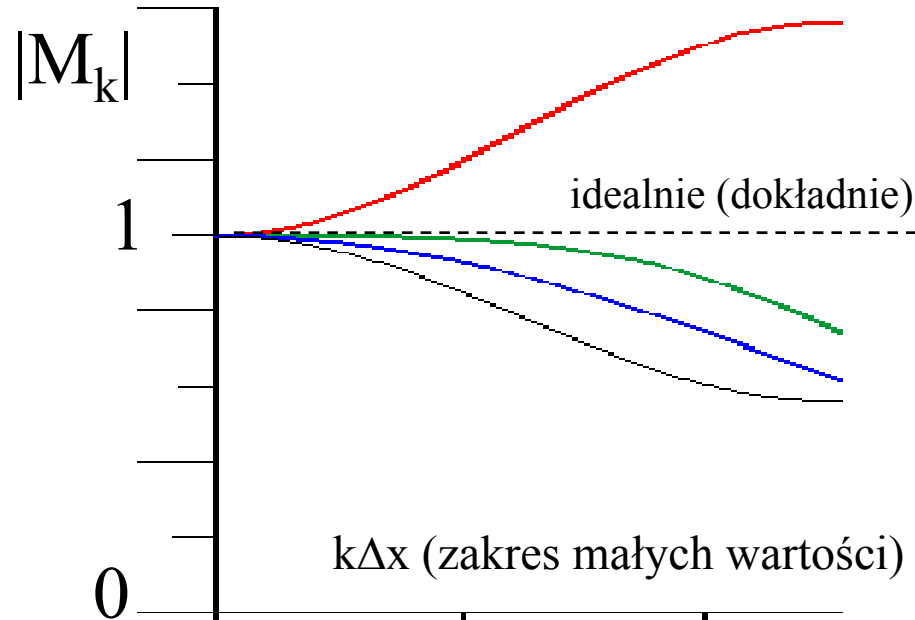
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\beta}{2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n),$$

analiza von Neumanna: $U_k^0(x_j = j\Delta x) = \sum_k A_k^0 \exp(ijk\Delta x)$


$$A_k^{n+1} = (1 - \alpha i \sin(k\Delta x) + \beta (\cos(k\Delta x) - 1)) A_k^n$$

zachowanie kształtu: wymaga współczynnika wzmocnienia o module 1 dla każdego k

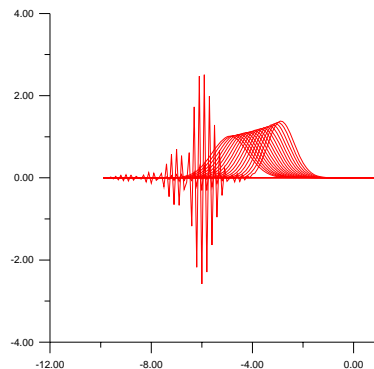
$$A_k^{n+1} = \underbrace{(1 - \alpha i \sin(k\Delta x) + \beta (\cos(k\Delta x) - 1))}_{M_k} A_k^n$$



- centralny
- LW
- upwind
- LF

centralny=wzmacnia wszystkie mody
im wyższy tym silniej
(stąd bwwz niestabilność)

pozostałe = gaszą wyższe częstotliwości
rozpływa się pakiet



dyspersja numeryczna:

$$u_t + v u_x = 0$$

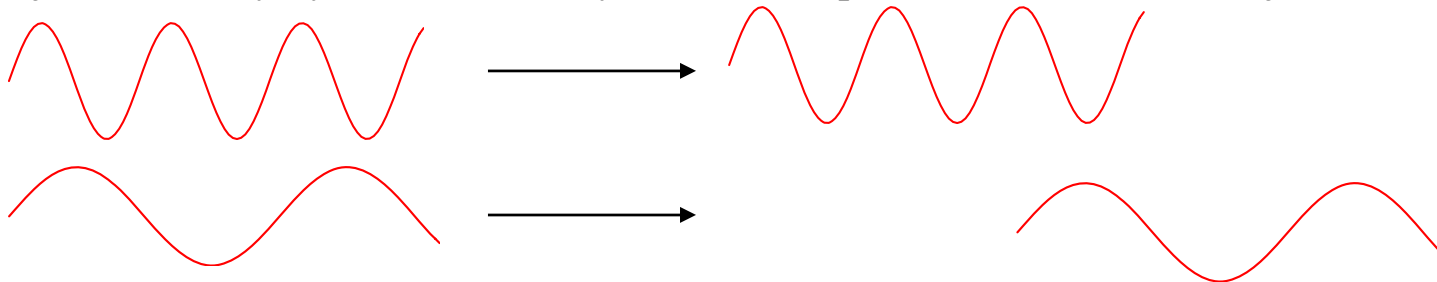
$$u(x, 0) = \exp(2\pi i k x)$$

$$u(x, t) = \exp(2\pi i k (x - vt))$$

prędkość fazowa

dla rozwiązania dokładnego prędkość fazowa v jest niezależna od k
 $v(k) = \text{relacja dyspersji}$. równanie adwekcji nie zawiera dyspersji
(podobnie jak liniowe równanie falowe) dlatego kształt pakietu pozostaje zachowany.
Schematy różnicowe odznaczają się jednak dyspersją numeryczną:

gdy v maleje z k zobaczymy że składowe szybkozmienne poruszać się będą wolniej:

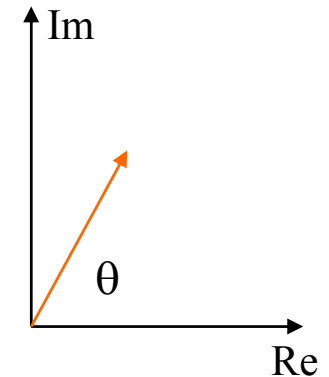


dyspersja numeryczna a schematy różnicowe dla równania adwekcji:

$$A_k^{n+1} = (1 - \alpha i \sin(k\Delta x) + \beta (\cos(k\Delta x) - 1)) A_k^n$$

$$M_k = |M_k| \exp(i\theta_k)$$

$$\theta_k = \arctan\left(-\frac{\alpha \sin(k\Delta x)}{1 + \beta(\cos(k\Delta x) - 1)}\right)$$



$$U_j^0 = \exp(2\pi i \Delta x k j)$$

$$u(x, t) = \exp(2\pi i k(x - vt))$$

$$U_j^n = |M_k|^n \exp(+in\theta_k) \exp(2\pi i \Delta x k j)$$

$$U_j^n = |M_k|^n \exp(2\pi i (\Delta x k j + n\theta_k / 2\pi))$$

numeryczna prędkość fazowa: wysupłać z $t = n\Delta t \rightarrow$

$$v_k = \frac{-\theta_k}{2\pi k \Delta t}$$

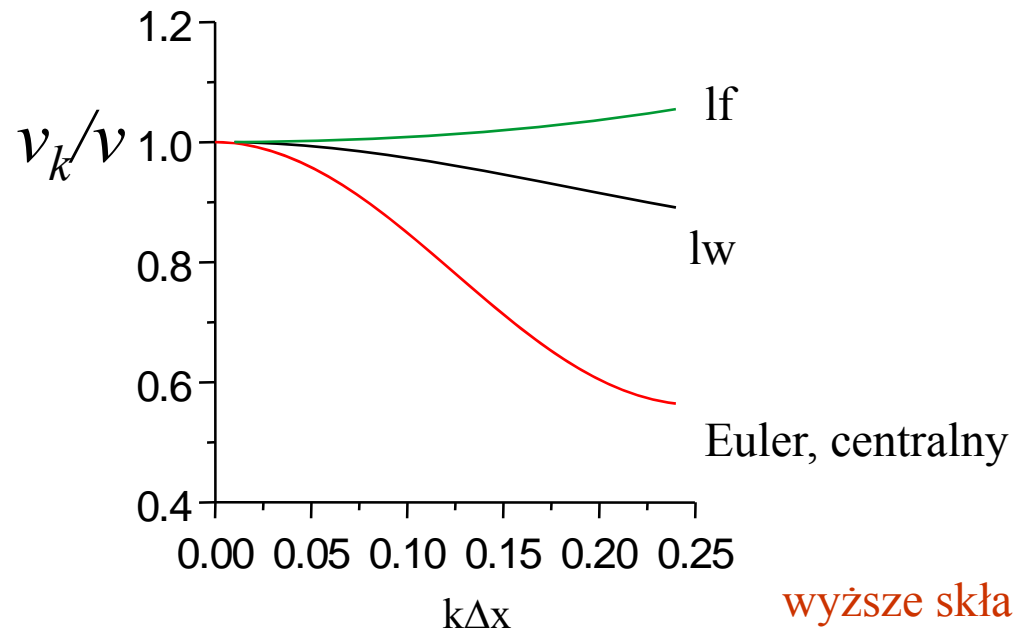
relacja dyspersji numerycznej dla schematów różnicowych

$$\theta_k = \arctan\left(-\frac{\alpha \sin(k\Delta x)}{1 + \beta(\cos(k\Delta x) - 1)}\right)$$

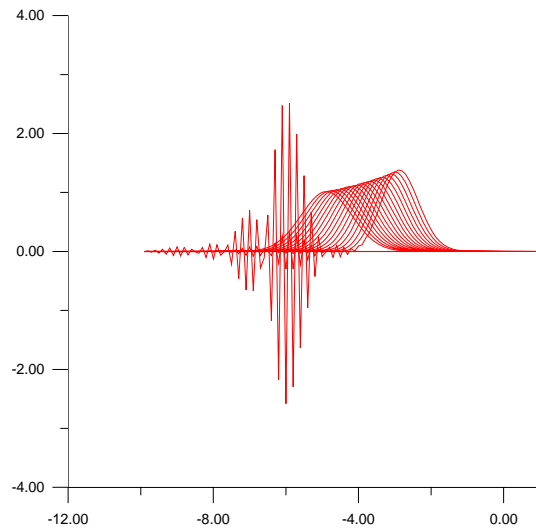
$$v_k = \frac{-\theta_k}{2\pi k\Delta t}$$

rozwińnięcie Taylora $\arctan(x)=x+\dots$
 podobnie sinus: $1/k$ ulegnie skasowaniu

różnicowa forma
 równania wprowadza
 dyspersję do rozwiązania



wyższe składowe
 spóźniają się



schemat przedni Eulera dla
równania adwekcji:

- 1) składowe przestrzenne o wyższych
częstościach są najszybciej wzmacniane
(odwrotność dyfuzji)
- 2) i spóźniają się za pakietem

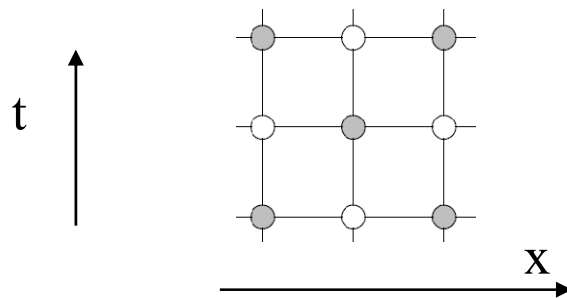
metoda zabiegu skoku (*leapfrog*): najprostszы schemat **dwupoziomowy**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{centralne ilorazy na obydwie strony} \\ \text{dotychczas, używaliśmy przedni czasowy} \end{array}$$

$$\frac{u(j, n+1) - u(j, n-1)}{2\Delta t} = -v \frac{u(j+1, n) - u(j-1, n)}{2\Delta x} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$U_j^{n+1} = -\alpha (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + U_j^{n-1} \quad O(\Delta t^3, \Delta x^2)$$

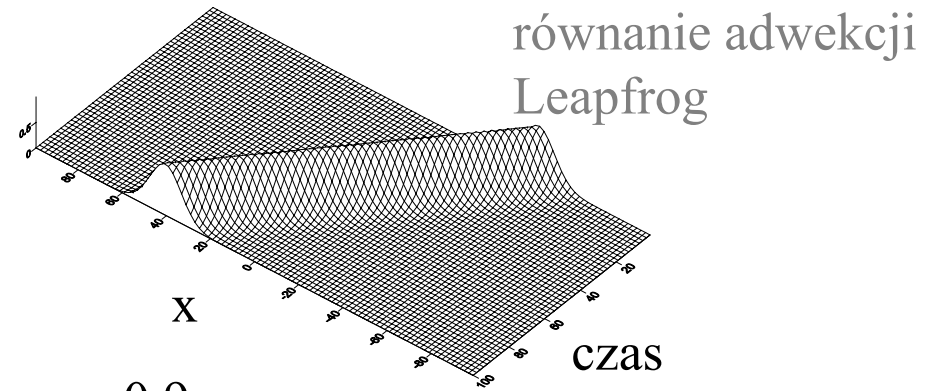
błąd lokalny jak LW



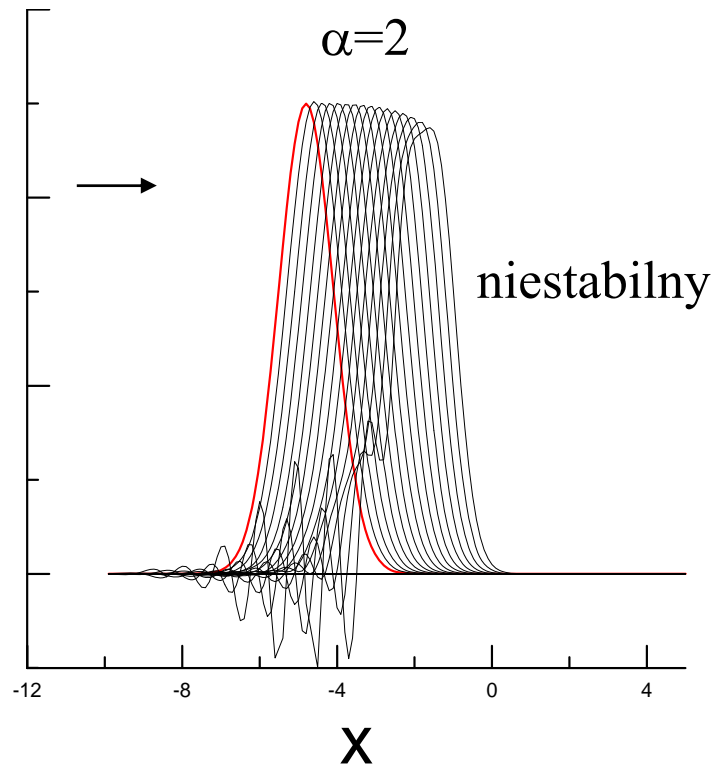
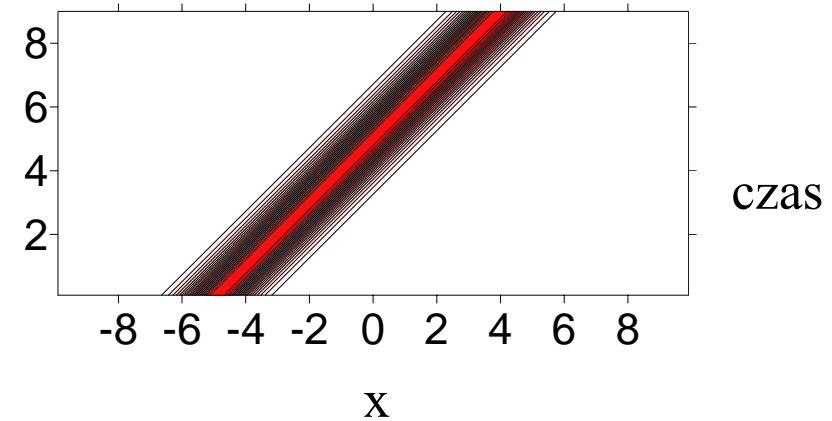
uwaga: nie jest *samostartujący*
warunek początkowy to zbyt mało
konieczne użycie innego schematu na
początku symulacji

Weźmy $\Delta x=0.1$

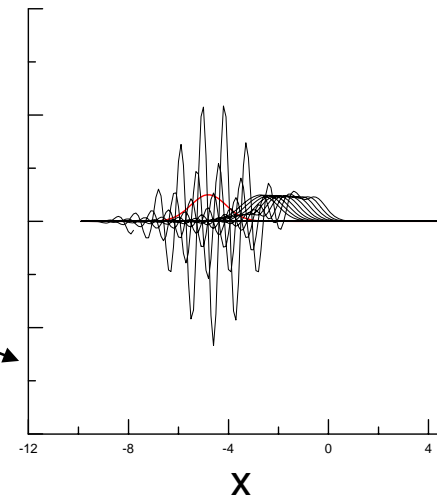
Kryterium CFL:
numeryczna DOD, musi obejmować
DOD fizyczną $v\Delta t < \Delta x$ ($v=1$)



$\alpha=0.9$



kończy się eksplozją



tw Laxa: WKW zbieżności spójnego
schematu jest jego stabilność

Analiza von Neumanna dla schematu dwupoziomowego na przykładzie *leapfrog*

$$U_j^{n+1} = -\alpha (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + U_j^{n-1}$$

$$U_k^0(x_j = j\Delta x) = \sum_k A_k^0 \exp(ik\Delta x)$$

$$A_k^{n+1} = -\alpha (A_k^n \exp(ik\Delta x) - A_k^n \exp(-ik\Delta x)) + A_k^{n-1}$$

$$A_k^{n+1} = -2\alpha i A_k^n \sin(k\Delta x) + A_k^{n-1}$$

trudność: dla jednopoziomowych podobna analiza dawała nam współczynnik wzmocnienia
modu k

teraz: proponujemy podobne rozwiązanie w formie: $A_k^{n+1} = M_k^{n+1} A_k^0$

równanie kwadratowe na współczynnik wzmocnienia:

$$M_k^2 + 2\alpha i \sin(k\Delta x) M_k - 1 = 0 \longrightarrow M_k(\pm) = -i\alpha \sin() \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2()}$$

$$M_k(\pm) = -i\alpha \sin() \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2()}$$

ogólne rozwiązanie równania różnicowego- kombinacja liniowa:

$$A_k^{n+1} = (c_k(+))M_k(+) + c_k(-)M_k(-)) A_k^n$$

zależą od warunku początkowego

aby mod k nie rósł z iteracji na iterację potrzeba aby : $|M_k(\pm)| \leq 1$

w naszym przypadku: bierzemy $\alpha \leq 1$ (bo CFL), a więc pierwiastek rzeczywisty i

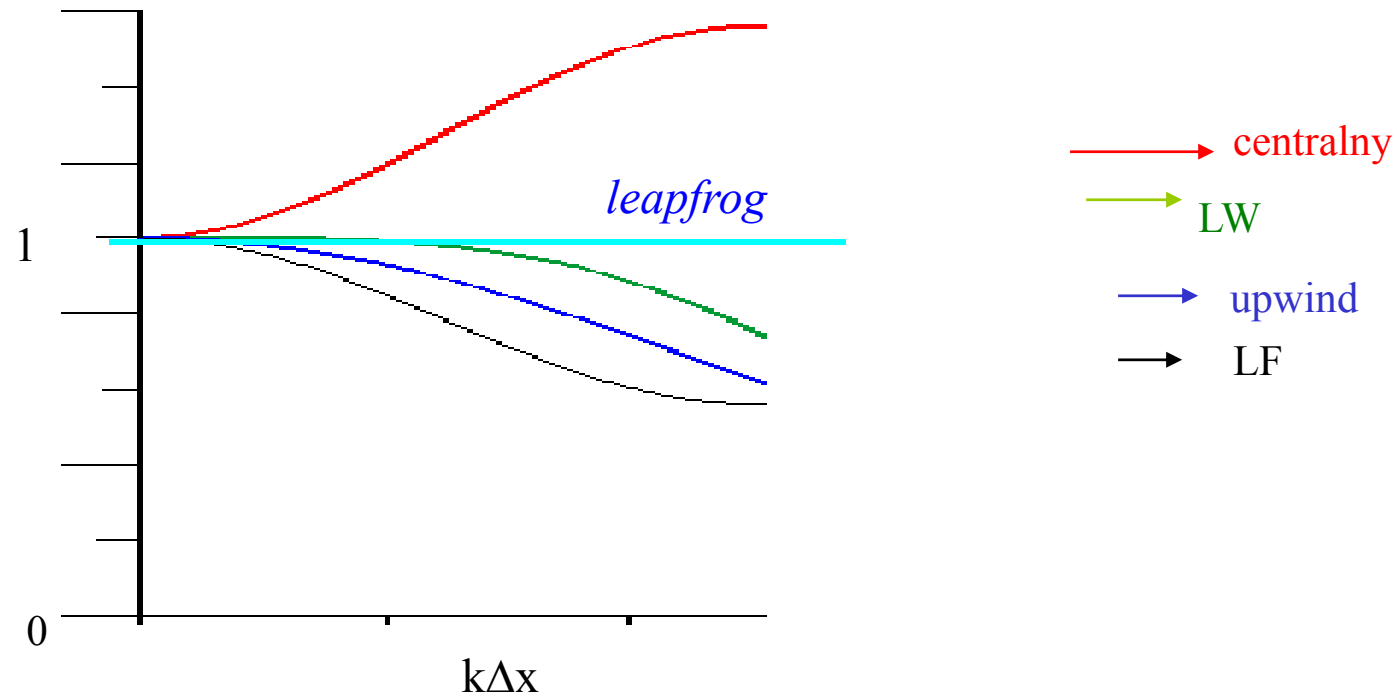
$$M_k(\pm) = -i\alpha \sin() \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2()}$$

$$|M_k(\pm)| = 1 - \alpha^2 \sin^2 + \alpha^2 \sin^2 = 1$$

niezależnie od α wszystkie mody zachowują swoje amplitudy : sytuacja idealna.
zachowany każdy kształt (jeśli tylko $\alpha \leq 1$)

$$|M_k(\pm)| = 1 - \alpha^2 \sin^2 + \alpha^2 \sin^2 = 1$$

niezależnie od α wszystkie mody zachowują swoje amplitudy : sytuacja idealna.
zachowany każdy kształt (stabilność bez dyfuzji, nieosiągalna dla 1 poziomowych)

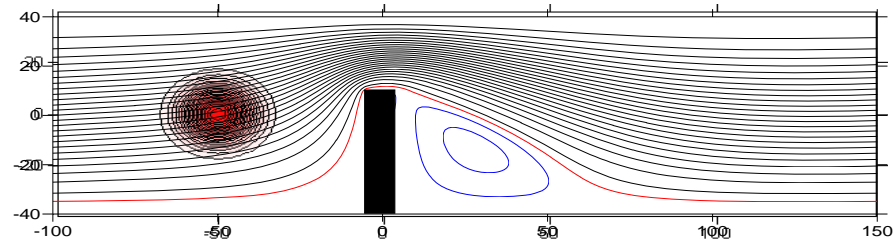


Laboratorium:
2D pole prędkości cieczy nieściśliwej:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla u) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V^x(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + V^y(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

musimy policzyć V_x/V_y na starcie



ogólnie nabrałoby przed $u\mathbf{V}$,
ale dla nieściśliwej dywergencja z $\mathbf{V}=0$
dla 1D: dostajemy stałą prędkość
dla 2D, prędkość nie jest stałą (jak widać na rysunku)

Leapfrog 1D:
$$U_j^{n+1} = -\alpha (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + U_j^{n-1}$$

leapfrog 2D: centralne pochodne czasowe i obydwie przestrzenne:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n-1} - \Delta t \left(V_{ij}^x \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + V_{ij}^y \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta x} \right)$$

warunek początkowy:

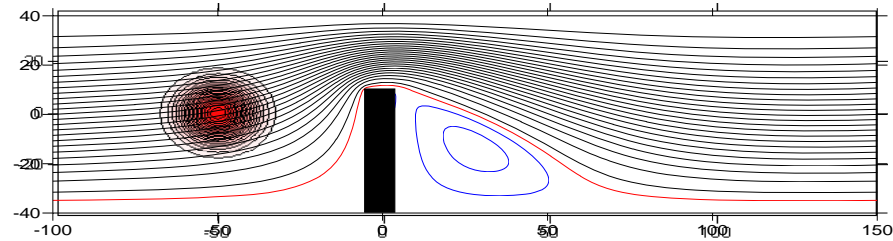
$$u(x, y, t = 0) = \exp(-25((x + 0.6)^2 + y^2)).$$

druga chwila czasowa:

$$u_{ij}^2 = u(x_i - V_{ij}^x \Delta t, y_j - V_{ij}^y \Delta t, t = 0)$$

przybliżenie dla drugiej chwili czasowej
: słuszne gdy \mathbf{V} prawie stałe w plamie,
lub Δt małe.
w sytuacji ogólnej:
pierwszy krok metodą jednopoziomową.

Laboratorium:
2D pole prędkości ciecży nieściśliwej:



$$V_m = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (\text{maksymalne})$$

$$\Delta t = dx / 4V_m. \quad (\text{policzymy z krokiem 4 razy mniejszym od CFL})$$

leapfrog:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n-1} - \Delta t \left(V_{ij}^x \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + V_{ij}^y \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta x} \right)$$

na przeszkodzie: obydwie składowe prędkości zerowe więc stałe $u (=0)$

w symulacjach nie widać przeszkody (żadna z linii strumienia nie kończy się na przeszkodzie)

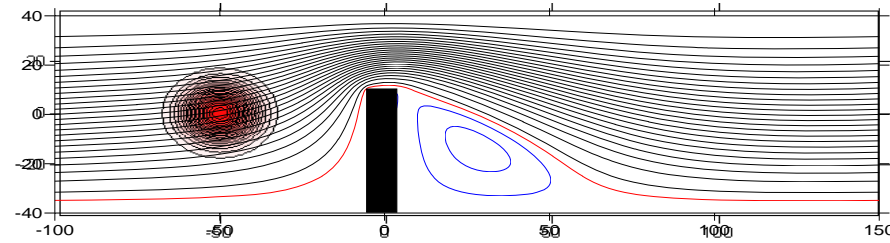
LF – centralne przestrzenne, przedni czasowy + ratunek z uśrednieniem

$$u_{ij}^{n+1} = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n}{4} - \Delta t \left(V_{ij}^x \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + V_{ij}^y \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \right).$$

zobaczymy przeszkodę (film)

używaliśmy:

$$\Delta t = dx / 4V_m.$$



wszystkie schematy dotychczas - jawne (działające jak podstawienie)
ich stabilność ogranicza kryterium CFL: $\alpha \leq 1$:

$$v dt \leq dx \rightarrow dt \leq dx / v$$

o kroku czasowym decyduje maksymalna prędkość niech no
tylko będzie w jednym punkcie bardzo wielka.
w naszym przykładzie największa prędkość w przewężeniu,
która nakłada najsilniejsze ograniczenie na krok czasowy.

Schematy niejawne: wprowadzane by o kroku czasowym decydowała tylko dokładność a nie stabilność

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$$

wsteczny Euler (prawa strona liczona w przyszłości)

przedni Euler (przednia strona liczona w teraźniejszości, lub wsteczny czasowy zamiast przedniego) bezwzględnie niestabilny był

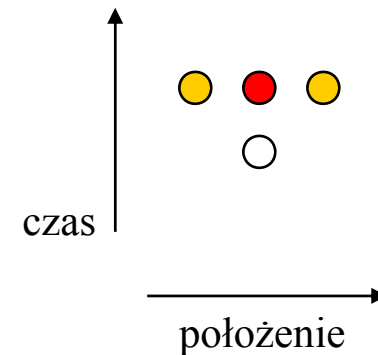
$$\frac{u(j, n + 1) - u(j, n)}{\Delta t} = -v \frac{u(j + 1, n + 1) - u(j - 1, n + 1)}{2\Delta x} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -v \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$-\frac{\alpha}{2} u_{j+1}^{n+1} + u_j^{n+1} + \frac{\alpha}{2} u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$-\frac{\alpha}{2} U_{j+1}^{n+1} + U_j^{n+1} + \frac{\alpha}{2} U_{j-1}^{n+1} = U_j^n$$

jest to układ równań na chwilę czasową $n+1$ (dla wszystkich j)

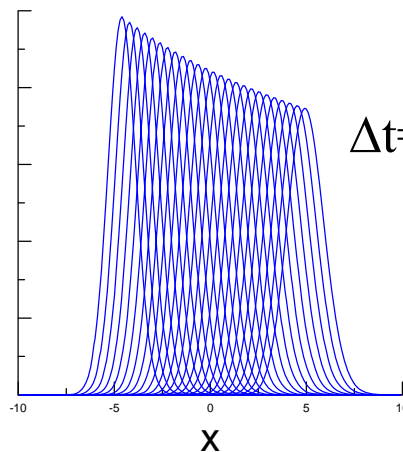


wsteczny Euler, układ równań do rozwiązania

$$-\frac{\alpha}{2}U_{j+1}^{n+1} + U_j^{n+1} + \frac{\alpha}{2}U_{j-1}^{n+1} = U_j^n \quad \text{dla wszystkich } j$$

można rozwiązać iterując do zbieżności: podstawienie

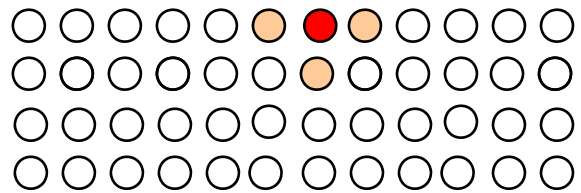
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1})$$



iteracyjne rozwiązanie układu RL
(odpowiednik iteracyjnej metody Gaussa)

numeryczna przeszłość (domena zależności) dla schematu niejawnego?

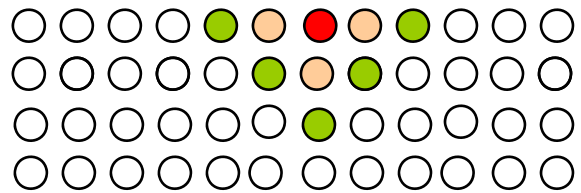
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1})$$



numeryczna przeszłość?

numeryczna przeszłość (domena zależności) dla schematu niejawnego?

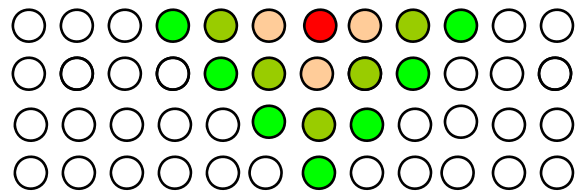
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1})$$



numeryczna przeszłość?

numeryczna przeszłość (domena zależności) dla schematu niejawnego?

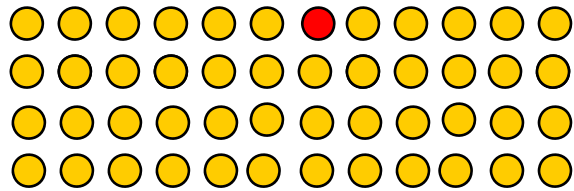
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1})$$



numeryczna przeszłość?

numeryczna przeszłość (domena zależności) dla schematu niejawnego?

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1})$$



numeryczna przeszłość:
cała połowa „czasoprzestrzeni”
dla chwil wcześniejszych,
a nawet cała teraźniejszość

dla schematów niejawnych
kryterium CFL zawsze spełnione!

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha/2 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha/2 & 1 & \alpha/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/2 & 1 & \alpha/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha/2 & 1 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ U_4^{n+1} \\ U_5^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \end{pmatrix}$$

jeśli zmienimy dowolny wyraz na prawej stronie:
zmienimy cały wektor rozwiązań (każdą z jego składowych)

ograniczenie na krok czasowy Δt w zbieżnych metodach jawnych
pochodziło od CFL. Jakie będzie dla wstecznego Eulera ?

wsteczny Euler: analiza von Neumanna

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1})$$

$$U_j^n = \sum_k A_k^n \exp(ikj\Delta x)$$

$$M_k - 1 = -M_k \frac{\alpha}{2} (\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x))$$

$$A_k^{n+1} = M_k A_k^n$$

$$M_k - 1 = -M_k \alpha i \sin(k\Delta x)$$

$$M_k = \frac{1}{1 + \alpha i \sin(k\Delta x)}$$

$$|M_k|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)}$$

nie większe od 1 dla dowolnego α

czyli metoda bwwz stabilna dla dowolnego Δt !

dla wstecznego Eulera: stabilność nie narzuca wymagania na krok czasowy!
jako, że metoda mało dokładna i tak trzeba aby był mały,
ale są lepsze metody niejawne

Crank-Nicolson (odpowiednik wzoru trapezów dla rrz)

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Euler:

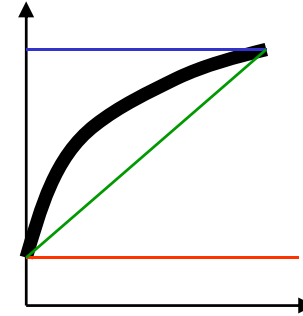
$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta f(t, y(t)) + O(\Delta t^2)$$

w. Euler:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta f(t + \Delta t, y(t + \Delta t)) + O(\Delta t^2)$$

w. trapezów:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{\Delta t}{2} [f(t + \Delta t, y(t + \Delta t)) + f(t, y(t))] + O(\Delta t^3)$$



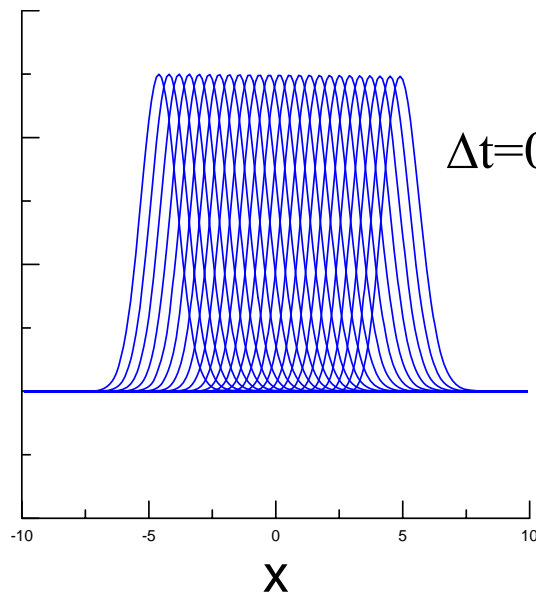
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$$

Euler:
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

lokalnie: $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

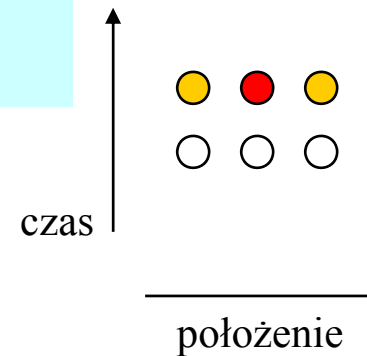
wsteczny Euler:
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1})$$

CN
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{4} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}) - \frac{\alpha}{4} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$



można rozwiązać
UR iteracyjnie
(równie łatwe
jak dla wst.E)

lokalnie: $O(\Delta t^3, \Delta x^2)$



schemat CN, analiza stabilności:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{4} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}) - \frac{\alpha}{4} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

$$M_k = 1 - iM_k \frac{\alpha}{2} \sin(k\Delta x) - i \frac{\alpha}{2} \sin(k\Delta x)$$

$$M_k = \frac{1 - \alpha i \sin(k\Delta x)/2}{1 + \alpha i \sin(k\Delta x)/2}$$

$$|M_k|=1$$

dla dowolnego kroku czasowego!

dla leapfrog $|M_k|=1$ tylko dla $\alpha \leq 1$

CN świetną metodą jest: wysokiej dokładności, stabilna bezwzględnie dla dowolnego kroku czasowego, współczynnik wzmocnienia 1 dla dowolnego k , bardzo prosta i stosowalna do wszystkich równań z pierwszą pochodną czasową

adwekcja zachodzi w ten sam sposób dla $(+t, +v)$ i $(-t, -v)$

zauważmy: *leapfrog dla adwekcji* – symetryczny względem zmiany kierunku upływu czasu z równoczesną zmianą kierunku v

(wyliczyć $n-1$ zamiast $n+1$, uwzględnić zmianę znaku α)

$$U_j^{n+1} = -\alpha (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + U_j^{n-1}$$

tak ma być!

dla przedniego Eulera mieliśmy:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

, który nie jest niezmienniczy względem zmiany kierunku upływu czasu

wsteczny Euler

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1})$$

również ten nie jest

z wstecznego Eulera do przedniego Eulera przechodzimy zmieniając znak t i v gdzie wsteczny ma dyfuzję numeryczną (gaszenie wyższych k) tam przedni ma antydyfuzję (generację wysokich składowych)

CN dla adwekcji jest symetryczny względem zmiany kierunku upływu czasu z równoczesną zmianą kierunku v

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{4} (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}) - \frac{\alpha}{4} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

widzieliśmy, że CN i leapfrog sprawdzają się najlepiej dla adwekcji
te schematy zachowują symetrię równania względem operacji $v \rightarrow -v, t \rightarrow -t$

uwaga: nie dla każdego równania idealny schemat
jest odwracalny:

np. równanie dyfuzji $u_t = u_{xx}$ niezmiennicze względem znaku t
nie jest