

# inżynierskie metody numeryczne

cel przedmiotu:

przygotowanie do pracy w zakresie  
numerycznego modelowania zjawisk i urządzeń  
stosowanego w zagadnieniach techniki (inżynierii) i nauki

symulacje obliczeniowe:

w technice: inżynieria obliczeniowa: modelowanie i symulacja zjawisk i urządzeń.  
badania i optymalizacji procesów produkcyjnych oraz produktów.

w nauce: interpretacja i przewidywanie danych doświadczalnych,  
zrozumienie obserwacji, przewidywanie nowych zjawisk.

Modelowanie naukowe/inżynieryjne: metody podobne, różnica w celu oraz obiekcie badań

## Metody badania układów/zjawisk/urządzeń:

- 1) Metody teoretyczne (modele rozwiązywane analitycznie)  
ograniczone do prostych problemów (w nauce – te akurat są często najważniejsze)  
lub wyidealizowanych modeli. Idealizacja oparta na intuicji, które bywa błędna.
- 2) Badania doświadczalne  
nieodzowne i najważniejsze, dla nauk przyrodniczych i dla przemysłu  
lecz drogie (i / lub czasochłonne)  
często nie wystarczają dla zrozumienia zjawisk  
przydatne wsparcie ze strony obliczeń ścisłych lub przybliżonych
- 3) Symulacje numeryczne  
pozwalają na rozwiązywanie dokładnych równań z kontrolowaną dokładnością  
często do wykonania taniej i szybciej niż badania doświadczalne  
pozwalają prześledzić wyniki w funkcji dowolnych parametrów – pełna informacja  
o możliwych do osiągnięcia własnościach

Tematyka wykładu: rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych.

Równania różniczkowe – opis zjawisk wprowadzony w XVII - XIX w.

Problemy rozwiązywalne analitycznie – nieliczne.

[np. Równania dynamiki płynów znane od połowy XIX wieku Navier/Stokes

- od stosunkowo niedawna są rozwiązywane poza najprostszymi przypadkami]

Metody numeryczne – przybliżone i wydajne rozwiązania równań.

-- niemal równie stare jak teoria równań różniczkowych

Metoda Eulera – XVIII w. Metody Rungego-Kutty, Galerkina – początek XX wieku.

Kwadratury Newtona, Gaussa – stara historia

(odkrycie Neptuna – połowa XIX wieku wynik symulacji numerycznej).

Nowsza historia: szybka transformata Fouriera, iteracje wielosiatkowe, niejawne metody RK

Stosowanie metod numerycznych – ograniczone i żmudne przed wynalezieniem komputerów.

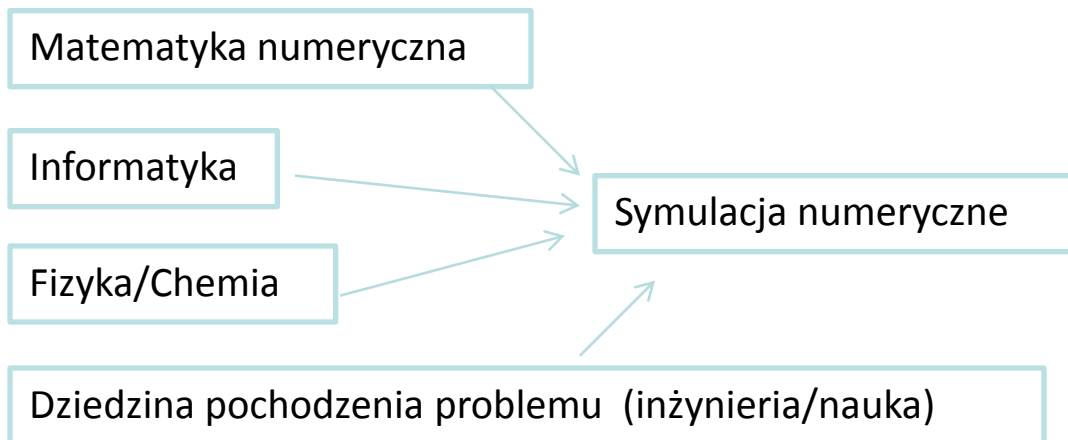
Znaczenie modelowania numerycznego rosło i będzie rosło z rozwojem sprzętu ...

Rok	FLOPS	Pamięć
1949 EDSAC (lampowy)	$10^2$	2kB
1997 ASCI Red (symulator eksplozji jądrowych)	$10^{12}$	300 GB
2002 NEC Earth Simulator (modelowanie klimatu)	$10^{13}$	10 TB
2009 IBM Blue Gene / Q	$10^{15}$	500 TB

oraz metod obliczeniowych (za M. Schaeferem, computational engineering)

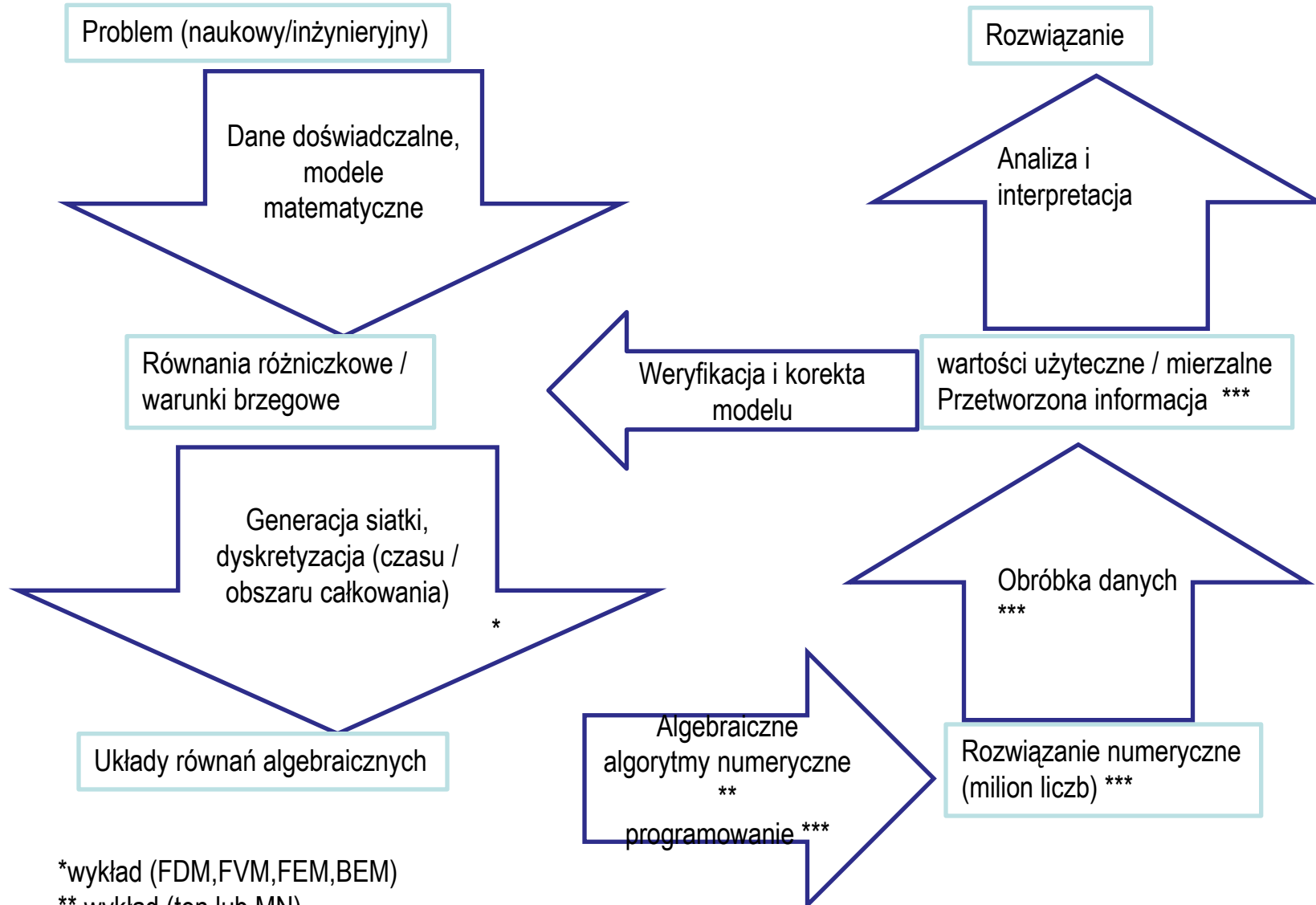
Rok		Tempo rachunków
1970	Eliminacja Gaussa	1
1975	Metoda Gaussa-Seidla	15
1980	Nadrelaksacja	250
1985	Metoda gradientów sprzężonych	1 k
1990	Metody wielosiatkowe	5 k
2000+	Siatka adaptowana	50 k

Symulacje numeryczne są ze swej natury interdyscyplinarne (matematyka, metody numeryczne, nauki ścisłe, konkretna dziedzina inżynierii / nauki + programowanie) - gdzie trzeba będzie starać się podawać elementarną wiedzę z zakresu fizyki opisywanych zjawisk.



Tylko w ujęciu inter – symulacje są użyteczne (interesujące)

# Miejsce numeryki w rozwiązywaniu problemów



\*wykład (FDM,FVM,FEM,BEM)

\*\* wykład (ten lub MN)

\*\*\* laboratorium

## Treść wykładu IMN 1

Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą różnic skończonych.

Program:

Zwyczajne jawne i niejawne schematy różnicowe do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Błędy schematów różnicowych, zbieżność, bezwzględna stabilność, iteracja Newtona dla schematów niejawnych. Automatyczny dobór kroku czasowego. Problemy sztywne. Metody Rungego-Kutty. Tabele Butchera. Dwupunktowe problemy brzegowe. Metoda strzałów. Liniowe metody wielokrokowe.

Równania cząstkowe. Typy równań. Metody iteracyjne dla równania Poissona. Metody wielosiatkowe. Równania Naviera Stokesa. Równanie adwekcji. Analiza stabilności schematów. Dyfuzja numeryczna. Schematy niejawne i wielopoziomowe. Schematy różnicowe dla równania dyfuzji. Problem odwrotny do równania dyfuzji. Szacowanie błędów i adaptacja kroku czasowego. Równanie falowe. Drgania własne, schematy Newmarka i Verleta.

## **Literatura:**

Press, Numerical Recipes (The art of scientific computing).

Weinberger, A first course in partial differential equations.

Koonin, Computational Physics.

Solin, Partial Differential Equations and the Finite Element Method.

Zienkiewicz, Finite Element Method, its basis & fundamentals.

Lienhard, A Heat Transfer Textbook.

Sabersky, Fluid flow : a first course in fluid mechanics.

Quarteroni, Numerical mathematics.

Trefethen, Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations.

Cichoń, Metody Obliczeniowe.

Sewell, The numerical solution of ordinary and partial differential equations.

Evans, Numerical Methods for Partial Differential Equations

R.Grzymkowski, A.Kapusta, I. Nowak, D. Słota, Metody Numeryczne, Zagadnienia

Brzegowe

Schafer, Computational Engineering, Introduction to Numerical Methods



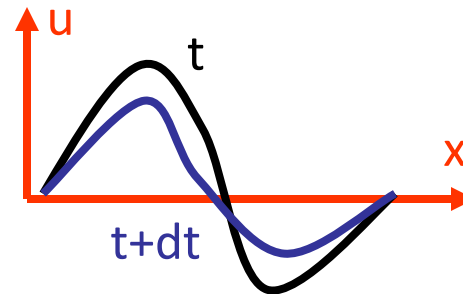
## Równania różniczkowe:

równania funkcyjne opisujące relacje spełniane przez pochodne nieznaną (poszukiwaną) funkcji

zazwyczaj dane równanie różniczkowe spełnia pewna klasa funkcji dla jednoznacznego rozwiązania – konieczne wprowadzenie **warunków początkowych i / lub brzegowych** związanych z danym problemem

**cząstkowe:** funkcja więcej niż jednej zmienna, np.: czas i położenie

np. wychylenie  $u(x,t)$  struny w położeniu  $x$  i czasie  $t$

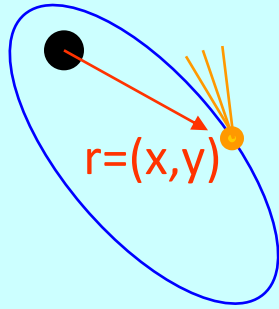


druga zasada dynamiki Newtona dla struny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

równania cząstkowe: nie zawsze jedną ze zmiennych jest czas, ale zawsze opisują obiekty rozciągłe

**równania różniczkowe zwyczajne:** jedna zmienna niezależna  
np. czas dla elementów punktowych, nierozciągłych

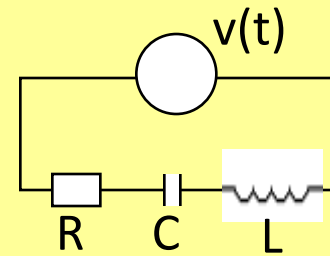


ruch w polu centralnym

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{GmM}{r^3} x$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{GmM}{r^3} y$$

układ równań nieliniowych  
2 rzędu – **problem początkowy**  
po zadaniu  $x(t=0), y(t=0),$   
 $x'(t=0), y'(t=0).$



$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C} = v(t)$$

napięciowe prawo Kirchoffa  
równanie liniowe drugiego rzędu

(nieliniowe) równania Lotki-Volterra

$$\frac{dz}{dt} = z(t) (\alpha - \beta w(t))$$

$$\frac{dw}{dt} = w(t) (\delta z(t) - \gamma)$$

$z$  – populacja zajęcy,  
 $w$  – wilków  
 $\alpha$  – naturalne tempo  
wzrostu pop. zajęcy  
(pod nieobecność  $w$ ),  
 $\gamma$  – zaniku wilków bez  $z$

układ r. 1 rzędu  
nieliniowe

$\beta, \delta$  – parametry  
oddziaływania populacji

# zwyczajne zagadnienie brzegowe (zamiast czasu, położenie w 1D -element rozciągliwy opisany jedną współrzędną)

zwyczajne rzędu drugiego lub wyższego

+ warunki na funkcje i pochodne na końcach przedziału

np. równanie Eulera-Bernoulliego:  
wygięcie jednorodnego elastycznego  
pręta pod wpływem rozłożonego  
obciążenia  $w(x)$



$$\frac{d^4 u}{dx^4} = w(x)$$

$$u = \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{lewy koniec: zamocowany i podparty}$$

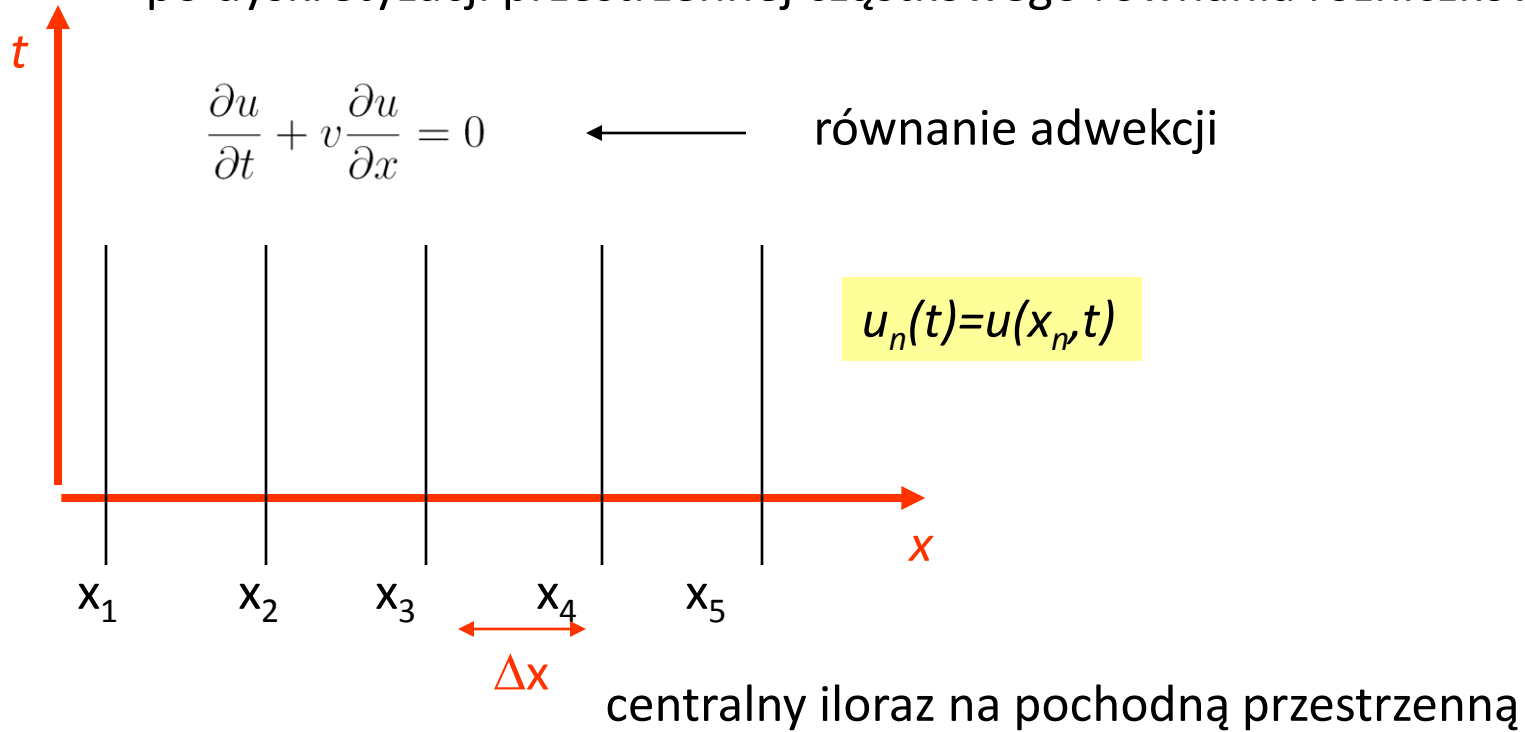
$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^3 u}{dx^3} = 0 \quad \text{prawy koniec: swobodny}$$

## Zaczynamy od rozwiązywania równań zwyczajnych

- 1) prostsza analiza niż dla cząstkowych
- 2) wprowadzimy pojęcia zbieżności, dokładności, stabilności itd. przydatne do metod rozwiązywania równań cząstkowych
- 3) jedna z metod rozwiązywania równań cząstkowych (metoda linii) - sprowadzamy równanie cząstkowe do układu równań zwyczajnych

## Metoda linii:

układy równań różniczkowych zwyczajnych  
- po dyskretyzacji przestrzennej cząstkowego równania różniczkowego



$$\frac{du_n(t)}{dt} = -v \frac{u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)}{2\Delta x} \quad \leftarrow \text{układ } N \text{ równań zwyczajnych}$$

## zwyczajne równania różniczkowe rzędu pierwszego [oraz ich układy]

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

warianty:

$$f(y, t) = \alpha(t)y(t) + \beta(t) \leftarrow$$

liniowe  
(układy równań  
liniowych rozwiązuje się  
analitycznie)

inna forma – nieliniowe

$\beta=0$  –jednorodne

---

jeśli  $f=f(t)$  (nie zależy od  $y$ )

rozwiązanie  
– całka nieoznaczona

$$y(t) = \int f(t)dt$$

---

jeśli  $f=f(y)$  (nie zależy od  $t$ )

równanie autonomiczne  
(nie podlega zaburzeniom zależnym od  $t$ )

**zagadnienie początkowe:**

równanie różniczkowe + warunek początkowy

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \quad y(t = 0) = y_0$$

---

jeśli  $f=f(t)$  rozwiązanie: całka oznaczona

$$y(t) = \int_0^t f(t)dt + y_0$$

**Równanie różniczkowe zwyczajne dowolnego rzędu  
można sprowadzić do układu równań pierwszego rzędu**

wystarczy jeśli potrafimy efektywnie rozwiązać układ równań rzędu pierwszego

Przykład:  $y'(t) = t + y(t) + y''(t)$

$$z_0(t) \equiv y(t) \quad \text{Zmiana oznaczeń}$$

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = z_1(t) \quad \text{Definicja traktowana jako jedno z równań do rozwiązania}$$

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = z_1(t) - t - z_0(t)$$

Równanie na najwyższą pochodną  
- jedyne „niedefinicyjne”



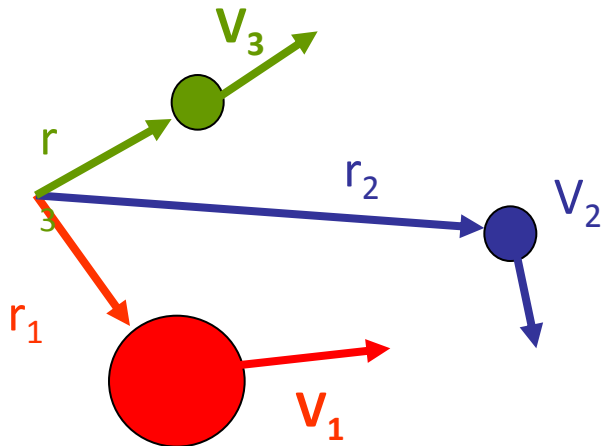
## O konieczności numerycznego rozwiązywania RRZ 1R:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

analitycznie rozwiązać można  
układ równań liniowych. nieliniowe: na ogół nie.

zazwyczaj nie znamy rozwiązań  
analitycznych równań nieliniowych

Układ 2 ciał oddziaływujących grawitacyjnie  
- analitycznie rozwiązany przez Newtona



Układ 3: ciał – nie posiada analitycznego  
rozwiązania

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}$$

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$

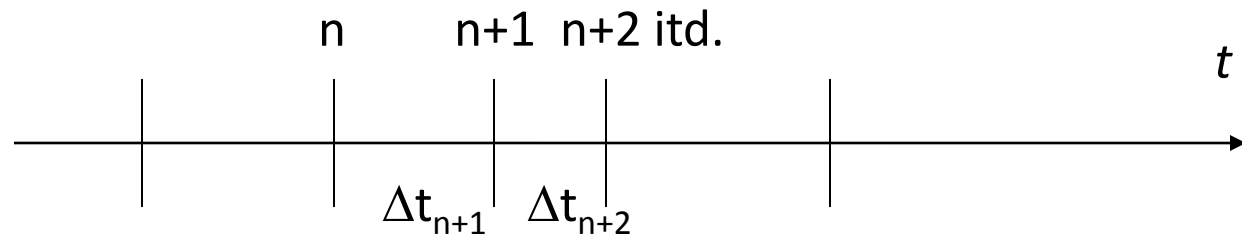
ponadto: automaty mające reagować na otoczenie  
nie znają postaci analitycznej  $f$ : ta jest brana z pomiarów  
bez wzoru na  $f$  skazani jesteśmy na rachunki numeryczne

$$u(t = 0) = u_0$$
$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u)$$

jeśli potrafimy rozwiązać  
układ równań rzędu pierwszego  
-rozwiążemy każdy różniczkowy problem początkowy

$$u(t = 0) = u_0$$
$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u)$$

Dyskretyzacja zmiennej czasowej



dyskretyzacja zmiennej czasowej sprowadza równania różniczkowe do różnicowych (metoda różnic skończonych)

Dobra metoda ma zapewnić zadaną dokładność przy pomocy minimalnej liczby wywołań  $f$  (przy maksymalnym kroku czasowym)

przy dyskusji metod – zakłada się, że wyliczenie  $f$  jest kosztowne – [jeśli nie jest kosztowne – nie ma problemu]

$$\begin{aligned}
 u(t = 0) &= u_0 \\
 \frac{du(t)}{dt} &= f(t, u)
 \end{aligned}$$

$$u(t + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \frac{d^k u(t)}{dt^k}$$

↓

im więcej znamy pochodnych w punkcie  $t$  tym większe otoczenie  $t$  możemy dobrze przybliżyć obcięтым rozwinięciem Taylora

tw. Taylora - między  $t$  a  $\Delta t$  istnieje taki punkt  $\xi$ , że

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \frac{du}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{\Delta t^4}{4!} u^{(4)}(\xi)$$

ograniczenie na resztę: maksymalna wartość czwartej pochodnej  $u$  w okolicy  $t$   
dokładniej: między  $t$  a  $t + \Delta t$ . Wartość błędu obcięcia znika do zera z  $\Delta t$  jak  $O(\Delta t^4)$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \frac{du(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{d^3 u(t)}{dt^3} + O(\Delta t^4)$$

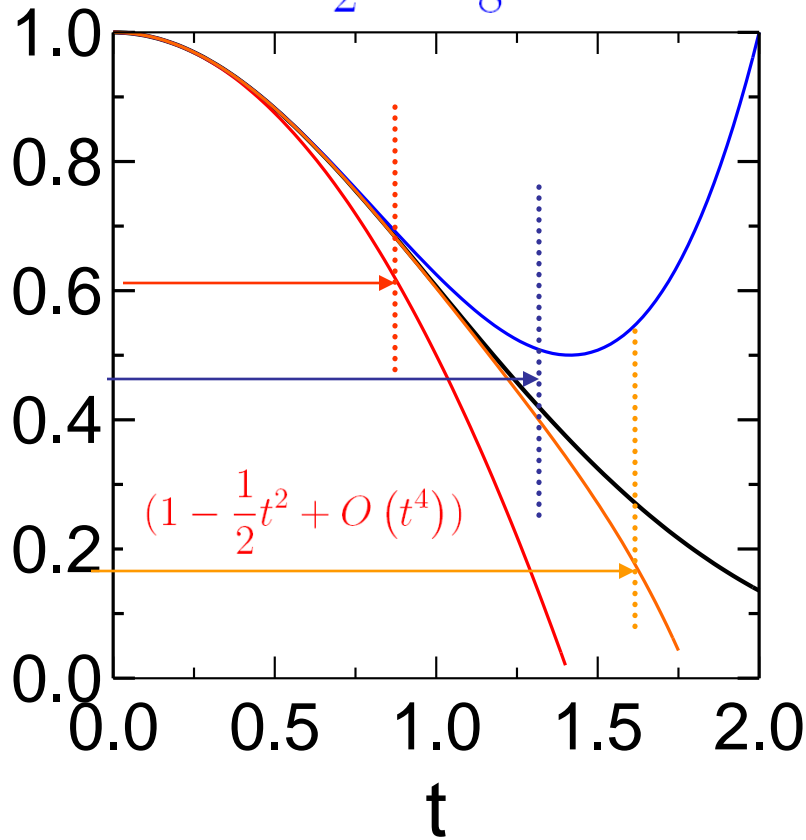
# Rząd błędu obcięcia w rozwinięciu Taylora

rozwijane wokół  $t=0$  [w roz.T.  $\Delta t=t$ ]

$$\frac{du}{dt} = -tu$$

$$u(0)=1 \quad u=\exp(-t^2/2)$$

$$(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + O(t^6))$$



$$(1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4))$$

$$u=\exp(-t^2/2)$$

$$(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 - \frac{1}{48}t^6 + O(t^8))$$

## Jawny schemat Eulera

$$u(t = 0) = u_0$$
$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \frac{du(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{d^3u(t)}{dt^3} + O(\Delta t^4)$$

---

## Jawny schemat Eulera

$$u(t = 0) = u_0$$
$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \frac{du(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{d^3u(t)}{dt^3} + O(\Delta t^4)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + f(t, u)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

przepis na pojedynczy krok  
z  $u(t)$  do  $u(t+\Delta t)$

można wyliczyć bo znamy  
 $t$  i  $u(t)$

błąd lokalny jawnego Eulera w kroku  $t_{n-1} \rightarrow t_n$   
wg tw. Taylora

$$l_n = \frac{\Delta t^2}{2} u''(\xi_n)$$

$$\xi_n \in (t_{n-1}, t_n)$$

**błąd lokalny schematu różnicowego:**  
odchylenie wyniku numerycznego  
od dokładnego, które pojawia się w  
pojedynczym kroku całkowania

## Jawny schemat Eulera

$$u(t = 0) = u_0$$
$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + f(t, u)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

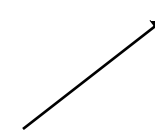
stosowany wielokrotnie:

$$u_1 = u_0 + \Delta t f(0, u_0)$$

$$u_2 = u_1 + \Delta t f(\Delta t, u_1)$$

...

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f(t_{n-1}, u_{n-1})$$

$$t_{n-1} = (n - 1)\Delta t$$


krok wcale nie musi być taki sam dla każdego  $n$ ,  
ale tak przyjmujemy do analizy



## Jawny schemat Eulera

$$u_1 = u_0 + \Delta t f(0, u_0)$$

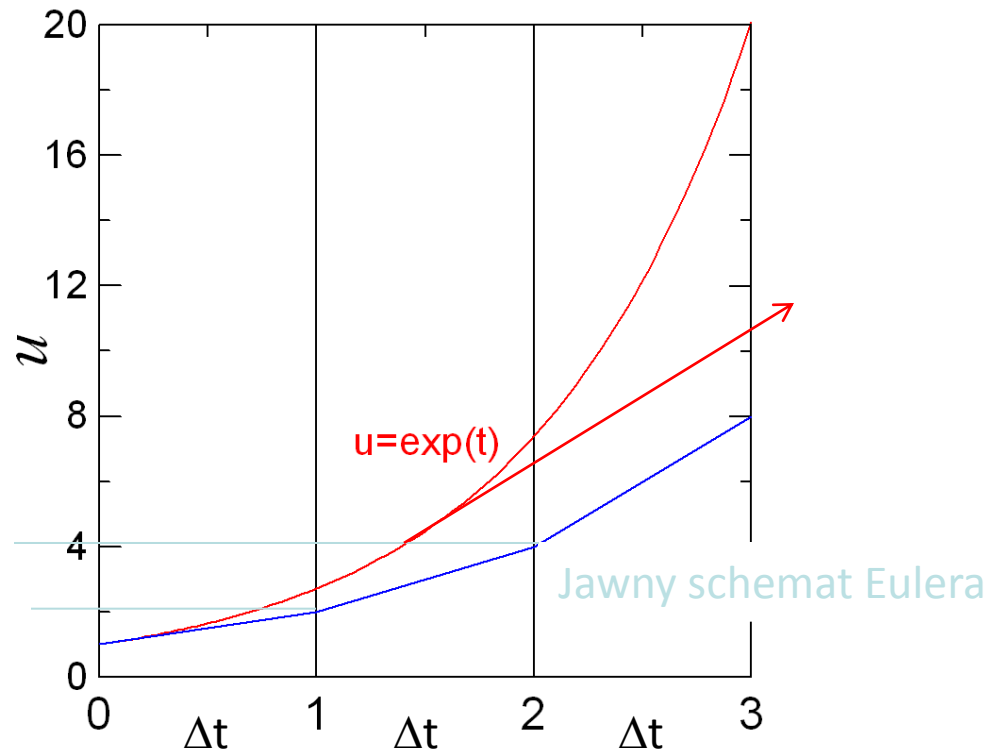
$$u_2 = u_1 + \Delta t f(\Delta t, u_1)$$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f(t_{n-1}, u_{n-1})$$

W rozwiązaniu dokładnym  
nachylenie  $u$  dane jest przez  $u$   
w każdej chwili

Jawnym schemat Eulera  
zakłada, że nachylenie jest  
stałe w jednym kroku czasowym  
i bierze je z wartości przybliżonej  
dla początku kroku

dokładny  
 $u(t) = \exp(t)$  dla  $du/dt = u$



Tylko  $u_0 = u(0)$   
później  $u_n < u(t_n)$   
Co prowadzi do akumulacji błędów

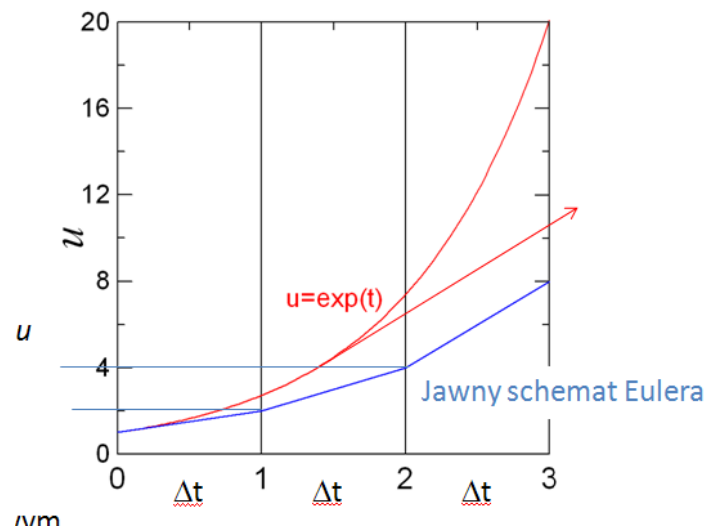
## Jawny schemat Eulera

$$u_1 = u_0 + \Delta t f(0, u_0)$$

$$u_2 = u_1 + \Delta t f(\Delta t, u_1)$$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f(t_{n-1}, u_{n-1})$$

dokładny  
 $u(t) = \exp(t)$  dla  $du/dt = u$



każdy krok wykonywany z nachyleniem  
branym z chwili, w której krok się zaczyna

Zmniejszamy krok  $\Delta t$ : Błąd lokalny zmaleje, ale do ustalonej chwili  $T$  musimy wykonać więcej kroków.  
W każdym kroku wprowadzamy nowy błąd. Błędy się akumulują.  
Czy opłaca się zmniejszać kroki czasowe?

**Definicja: Błąd globalny – różnica między rozwiązaniem dokładnym a numerycznym w chwili  $t$**

„Czy się opłaca” znaczy: Czy błąd globalny maleje gdy  $\Delta t$  maleje ?

a jeśli tak - czy maleje do zera? (czy możliwe jest dokładne rozwiązanie  
równania różniczkowego uzyskane jako  
granica schematu różnicowego)

# Jawny schemat Eulera

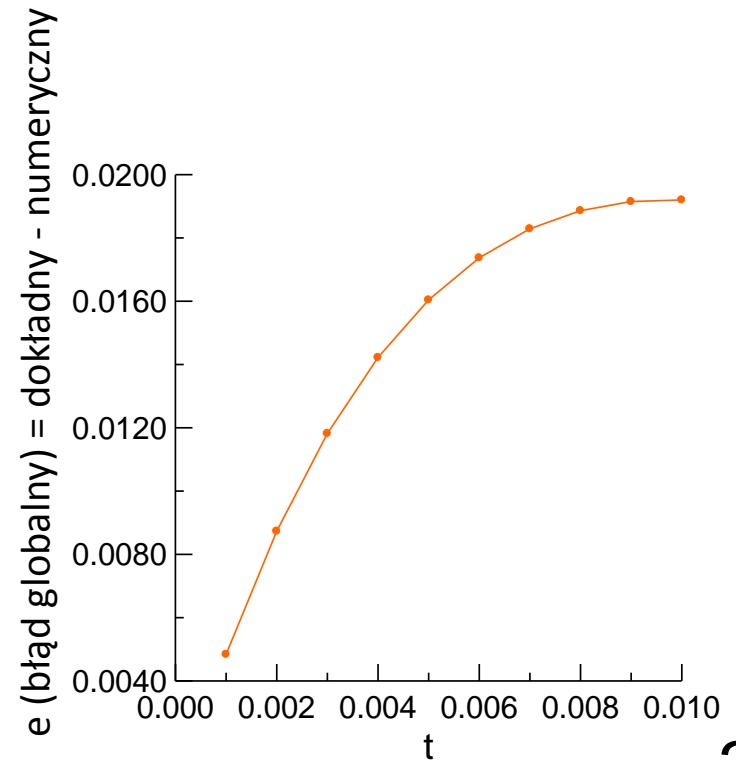
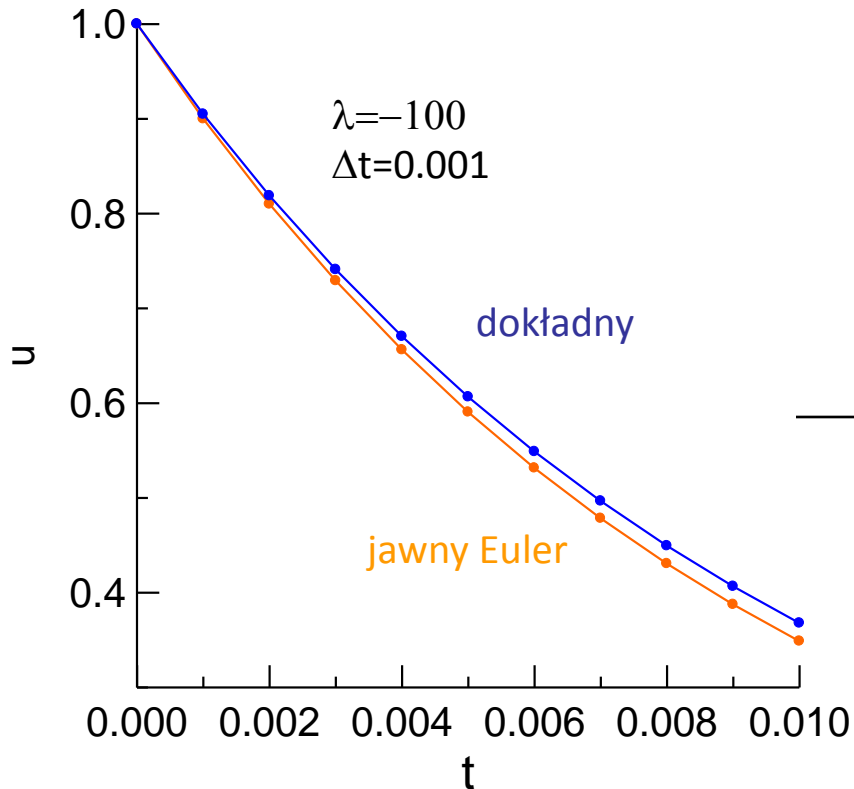
Czy błąd całkowity maleje gdy  $\Delta t$  maleje ?  
Czy maleje do zera?

eksperyment numeryczny

problem początkowy:

$$u' = \lambda u, \quad u(0) = 1$$

z rozwiązaniem dokładnym  $u(t) = \exp(\lambda t)$



# Jawny schemat Eulera

Czy błąd globalny maleje gdy  $\Delta t$  maleje ?  
Czy maleje do zera?

eksperyment numeryczny

problem początkowy:

$$u' = \lambda u, \quad u(0) = 1$$

z rozwiązaniem dokładnym  $u(t) = \exp(\lambda t)$

$$\lambda = -100$$

zmniejszamy krok czasowy, jaki wynik w chwili  $t=0.01$  ? [ $1/e = .3678794$ ]

n	$\Delta t$	$u_n$	$\exp(-1) - u_n$
10	$10^{-3}$	0.34867	$1.920 \times 10^{-2}$
$10^2$	$10^{-4}$	0.36603	$1.847 \times 10^{-3}$
$10^3$	$10^{-5}$	0.36769	$1.840 \times 10^{-4}$
$10^4$	$10^{-6}$	0.36784	$1.839 \times 10^{-5}$

błąd globalny w chwili  $t=0.01$  wydaje się zmieniać liniowo z krokiem czasowym

$$u(t + \Delta t) = u(t) + f(t, u)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

interpretacja: błąd lokalny rzędu  $\Delta t^2$   
popołniony  $n = t/\Delta t$  razy daje błąd globalny rzędu  $\Delta t$

zmniejszamy krok czasowy, jaki wynik w chwili  $t=0.01$  ? [ $1/e=.3678794$ ]

n	$\Delta t$	$u_n$	$\exp(-t)-u_n$
10	$10^{-3}$	0.34867	$1.920 \times 10^{-2}$
$10^2$	$10^{-4}$	0.36603	$1.847 \times 10^{-3}$
$10^3$	$10^{-5}$	0.36769	$1.840 \times 10^{-4}$
$10^4$	$10^{-6}$	0.36784	$1.839 \times 10^{-5}$

błąd globalny w chwili  $t=0.01$  wydaje się zmieniać liniowo z krokiem czasowym

Definicja:

Metody różnicowa jest **zbieżna** jeśli błąd globalny  $e$

$$\lim_{n \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t = T} |e_n| = 0$$

znika do zera w chwili T gdy z  $\Delta t$  do 0

## rzęd zbieżności (dokładności)

określa jakość metody: jak szybko błąd globalny  
zmierza do zera w funkcji  $\Delta t$

jawna metoda Eulera = pierwszy rząd dokładności  $O(\Delta t)$

jest to minimalny rząd dokładności dla użytecznej metody

zmniejszamy krok czasowy, jaki wynik w chwili  $t=0.01$  ? [ $1/e=.3678794$ ]

n	$\Delta t$	$u_n$	$\exp(-t)-u_n$
10	$10^{-3}$	0.34867	$1.920 \times 10^{-2}$
$10^2$	$10^{-4}$	0.36603	$1.847 \times 10^{-3}$
$10^3$	$10^{-5}$	0.36769	$1.840 \times 10^{-4}$
$10^4$	$10^{-6}$	0.36784	$1.839 \times 10^{-5}$

Dowód zbieżności metody Eulera – dla ogólnego równania liniowego – pokażemy później.

Wróćmy do eksperymentu numerycznego i zwiększmy krok czasowy do  $\Delta t=0.05$

problem początkowy:

$$u'=-100u, u(0)=1$$

z rozwiązaniem dokładnym  $u(t)=\exp(-100t)$

$t_n$	$u_n$
0	1
0.05	-4
0.1	8
0.15	-16
0.2	256
0.25	-1024
0.3	4096

iteracja się rozbiega 😞

wniosek: wyniki metody zbieżnej mogą eksplodować dla zbyt dużego kroku czasowego

## bezwzględna stabilność schematu różnicowego

schemat różnicowy dla

$$du/dt = f$$

(dla danego  $f$ ) i dla danego kroku czasowego jest **bezwzględnie stabilny** jeśli kolejne generowane przez niego wartości pozostają skończone.

*Uwaga:*

Zbieżność jest cechą schematu nie zależną od  $f$

Bezwzględna stabilność określa się dla schematu i konkretnego równania

W charakterystyce schematów

Najczęściej stabilność bezwzględna:

określana jest dla autonomicznego problemu liniowego

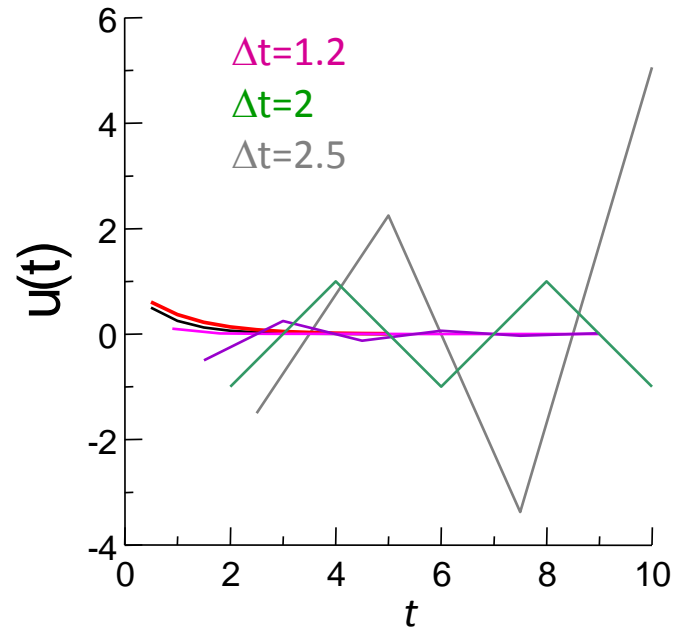
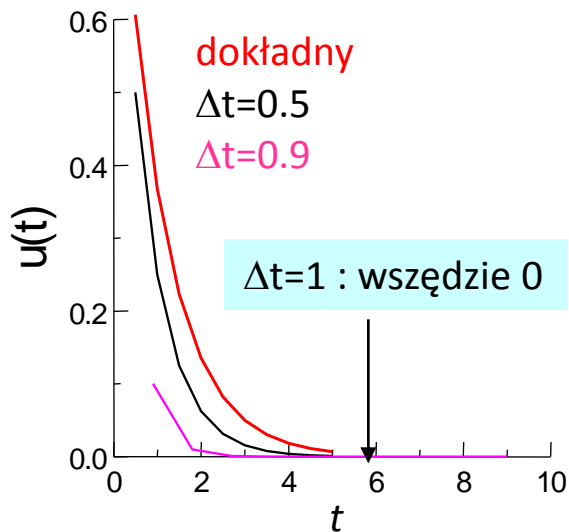
$$\frac{du}{dt} = \lambda u$$



$$\frac{du}{dt} = \lambda u$$

Weźmy  $\lambda = -1$ ,  $u(0)=1$ , rozwiązanie dokładne  $u(t)=\exp(-t)$

Przepis Eulera:  $u_{n+1}=u_n - \Delta t u_n$



Schemat bezwzględnie stabilny dla  $\Delta t \leq 2$

uwaga: rozwiązanie bezwzględnie stabilne (np.  $\Delta t=1$  lub  $\Delta t=2$ )  
 może być bardzo niedokładne lub wręcz - jakościowo złe = tutaj stałe i niemonotoniczne  
 odpowiednio

$$\frac{du}{dt} = \lambda u$$

bezwzględna stabilność jawnej metody Eulera

$$u_n = u_{n-1} + \lambda \Delta t u_{n-1}$$

$$u_n = u_{n-1} + \lambda \Delta t u_{n-1} = (1 + \lambda \Delta t) u_{n-1} = \underbrace{(1 + \lambda \Delta t)^n}_{\text{wsp. wzmocnienia}} u_0$$

wyniki pozostaną skończone dla  $n \rightarrow \infty$  jeśli:

$$|1 + \lambda \Delta t| \leq 1$$

$$|1 + \lambda \Delta t| \leq 1 \longrightarrow \overset{\text{Zmienna zespolona}}{z = \lambda \Delta t} \longrightarrow |1 + z| \leq 1$$

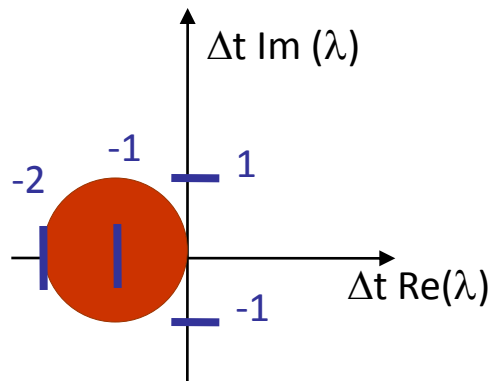
**region bezwzględnej stabilności metody:**

zbiór  $z = \lambda \Delta t$ , dla których metoda jest bezwzględnie stabilna

region bezwzględnej stabilności jawnej metody Eulera:

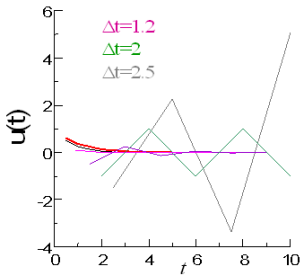
zbiór punktów odległych od  $(-1,0)$  o nie więcej niż 1

koło o środku w  $(-1,0)$   
i promieniu 1



niestabilność bezwzględna metody dla prawej połowy  $p$ . Gaussa = nic dziwnego  
rozwiązanie dokładne  $y_0 \exp(\lambda t)$  eksploduje do nieskończoności gdy  $t \rightarrow \infty$ .

# pozbyć się ograniczenia na krok czasowy ze strony bezwzględnej stabilności: niejawna metoda Eulera



$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

$$u_n = u_{n-1} + f(t_{n-1}, u_{n-1})\Delta t$$

jawna metoda Eulera

jawna metoda Eulera  
(funkcjonuje jak podstawienie)

„metoda odważna”

$$u_n = u_{n-1} + f(t_n, u_n)\Delta t$$

niejawna metoda Eulera

funkcjonuje jak równanie nieliniowe

„metoda ostrożna”  
zmiana  $u$  zgodna z prawą stroną  
w punkcie docelowym

## niejawna metoda Eulera:

problem początkowy:

$$u' = -100u, \quad u(0) = 1$$

z rozwiązaniem dokładnym  $u(t) = \exp(-100t)$

jawny Euler

$t_n$	$u_n$
0	1
0.05	-4
0.1	8
0.15	-16
0.2	256
0.25	-1024
0.3	4096

niejawny Euler

$$u_n = u_{n-1} - 100\Delta t u_n$$

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{(1 - \Delta t \lambda)}$$

W naszym problemie  $u_n = 1/6^n$

$t_n$	$u_n$	$e(t_n)$
0	1	0
0.05	.166(6)	-.15992
0.1	.027(7)	-.02773
0.15	.004(629)	-.00462
0.2	.0007716	
0.25	.0001286	
0.3	.00002143	

itd..

$\exp(-100 t_n)$  gaśnie  
znacznie szybciej niż  $1/6^n$

mało dokładne, ale zawsze to lepiej niż  
eksplodująca oscylacja jawnego Eulera

niejawna metoda Eulera:  
region bezwzględnej stabilności

$$\frac{du}{dt} = \lambda u$$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \lambda u_n$$

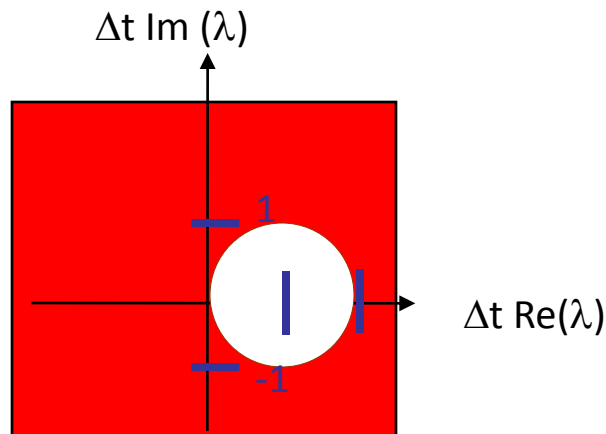
$$u_n = \frac{u_{n-1}}{(1 - \Delta t \lambda)}$$

$$u_n = \frac{u_0}{(1 - \Delta t \lambda)^n}$$

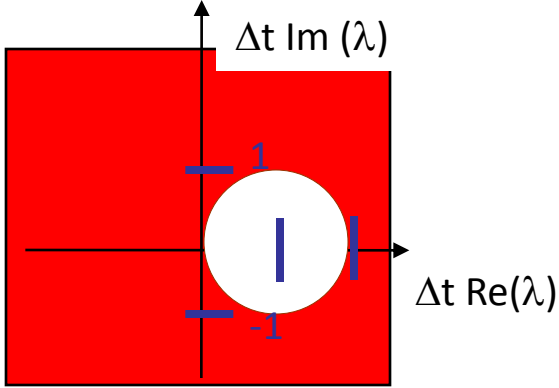
$$\longrightarrow \left| \frac{1}{(1 - \Delta t \lambda)^n} \right| \leq 1$$



$$|1 - z| \geq 1$$



region bezwzględnej stabilności:  
dopełnienie pustego koła o środku w (1,0)  
i promieniu 1

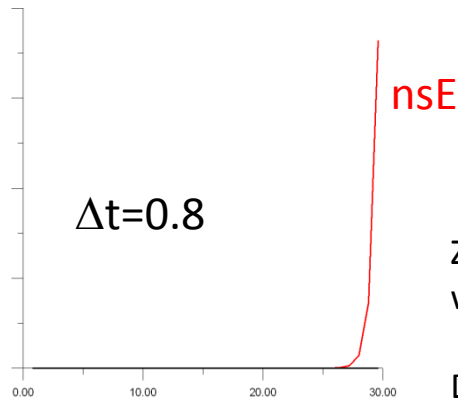
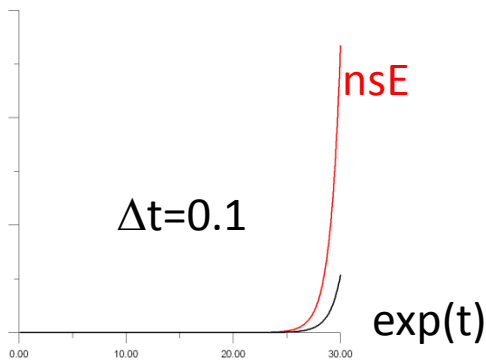


$$\frac{du}{dt} = \lambda u$$

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{(1 - \Delta t \lambda)}$$

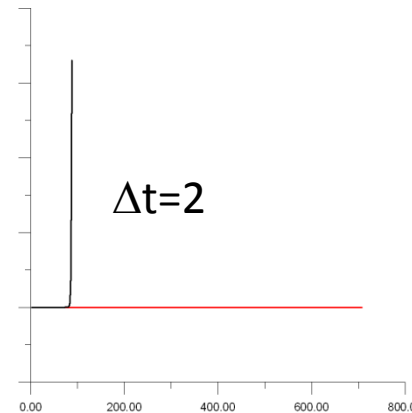
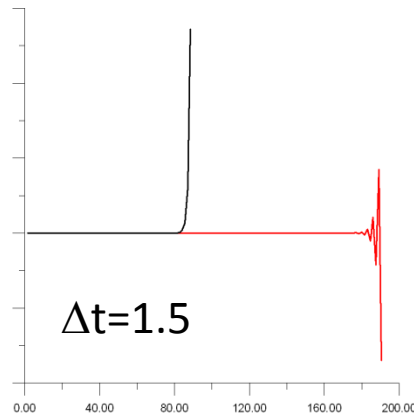
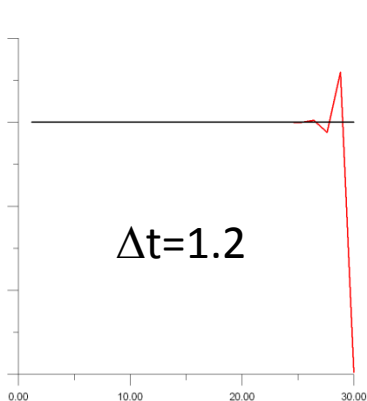
Niejawny schemat Eulera

$\lambda=1$  – zakres niestabilności  $\Delta t \in (0,2)$



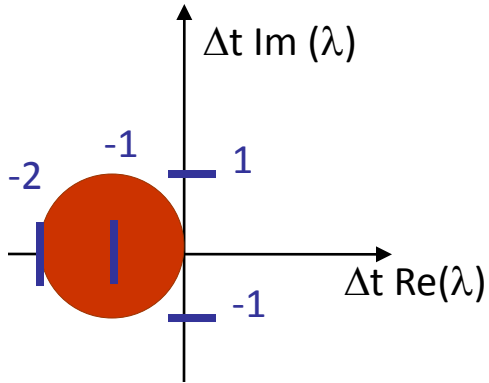
Zbliżamy się do  $\Delta t=1$  –  
wyniki schematu rosną coraz szybciej

Dla  $\Delta t=1$  –  
nieskończoność w pierwszym kroku

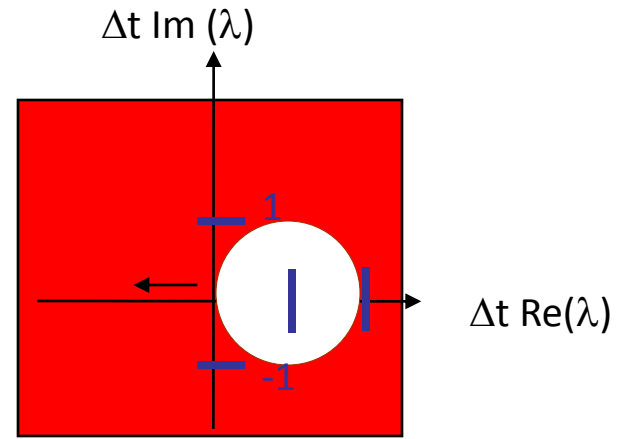


1,-1,1,-1 itd

regiony stabilności metod Eulera



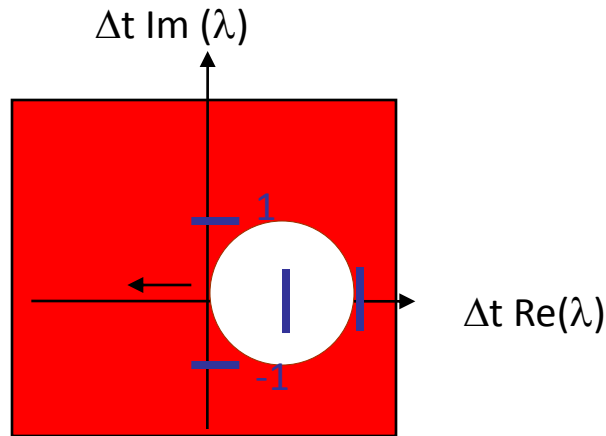
metoda Eulera jawna



niejawna metoda Eulera



niejawna metoda Eulera:  
region bezwzględnej stabilności



$$\frac{du}{dt} = \lambda u$$

$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  : niejawny Euler bezwzględnie stabilny  
dla dowolnego kroku czasowego

**takie metody: tzw. A-stabilne**

dla  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , poza kołem metoda Eulera  
jest bezwzględnie stabilna  
mimo, że rozwiązania równania różniczkowego  
są niestabilne (patrz wyżej)  
w tym obszarze metoda jest **nadstabilna**  
daje skończone wartości, mimo że  
rozwiązania dokładne dążą do nieskończoności

bezwzględna stabilność  
nie oznacza dobrej dokładności.  
W regionie nadstabilności  
dla  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  błędy będą rosły w nieskończoność.

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

$$u_n = u_{n-1} + f(t_n, u_n) \Delta t$$

jak rozwiązać, gdy nie można rozwinąć równania ( $f$  nieliniowe względem  $u$ )  
lub gdy  $f$  nieznane w formie wzoru

### 1) iteracja funkcjonalna

$$u_n^0 = u_{n-1}$$

$$u_n^1 = u_{n-1} + \Delta t f(t_n, u_n^0)$$

$$u_n^\mu \rightarrow u_{n-1} + \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1})$$

iterować do zbieżności

jeśli się zbiegnie  $u^\mu = u^{\mu-1}$  i mamy rozwiązanie równania nieliniowego

## iteracja funkcjonalna przykład

problem początkowy:

$$u' = -100u, \quad u(0) = 1, \quad dt = 0.05$$

z rozwiązaniem dokładnym  $u(t) = \exp(-100t)$

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{(1 + \lambda \Delta t)} = \frac{u_{n-1}}{6}$$

$t_n$	$u_n$	$e(t_n)$
0	1	0
0.05	.166(6)	-.15992
0.1	.027(7)	-.02773
0.15	.004(629)	-.00462
0.2	.0007716	
0.25	.0001286	
0.3	.00002143	

$$u_n^\mu = u_{n-1} + \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1})$$

$$u_1^0 = 1$$

$$u_1^\mu = 1 - 5u_1^{\mu-1}$$

kolejne oszacowania:

1, -4, 21, -104, 521, -2604, ...

iteracja się nie zbiega ☹️

cały zysk z niejawności stracony  
bo nie potrafimy wykonać kroku

## iteracja funkcjonalna przykład

iteracja się nie zbiega ☹. zmniejszymy krok  $dt$ ,  
zaczynając iterację od  $u_{n-1}$  będziemy bliżej rozwiązania. Może się zbiegnie.

$dt=0.01$

$$u_1^0 = 1$$

$$u_1^\mu = 1 - u_1^{\mu-1}$$

(1,0,1,0,1,0)

$dt=0.001$

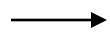
$$u_1^0 = 1$$

$$u_1^\mu = 1 - u_1^{\mu-1}/10$$

1, 0.9, 0.91, 0.909, 0.9091, 0.90909, 0.909091,  
... 0.90909090909

iteracja funkcjonalna się zbiega gdy  $\Delta t \max |f_u(t,u)| \leq 1$  (w otoczeniu  $u$ )

$u' = -100u,$



$\Delta t 100 < 1$  uwaga: w tej sytuacji  
jawny Euler jest bezwzględnie stabilny dla 2-krotnie większego kroku!  
[dla jawnego Eulera  $\Delta t 100 < 2$ ]  
Z iteracją funkcjonalną stosować wstecznego Eulera nie ma sensu.

problem początkowy:

$$u' = -100u, \quad u(0) = 1, \quad dt = 0.05$$

z rozwiązaniem dokładnym  $u(t) = \exp(-100t)$

1, -4, 21, -104, 521, -2604, ...

oscylująca rozbieżność  
- stłumimy ją:

iteracja funkcjonalna – zapewniamy zbieżność modyfikując przepis iteracyjny

zamiast:

$$u_n^\mu = u_{n-1} + \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1})$$

„mieszając” nowe i stare rozwiązania z wagą  $w$ ,  $0 \leq w \leq 1$

$$u_n^\mu = (1 - w)u_n^{\mu-1} + w \left( u_{n-1} + \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1}) \right)$$

Zabieg podobny do “podrelaksacji”

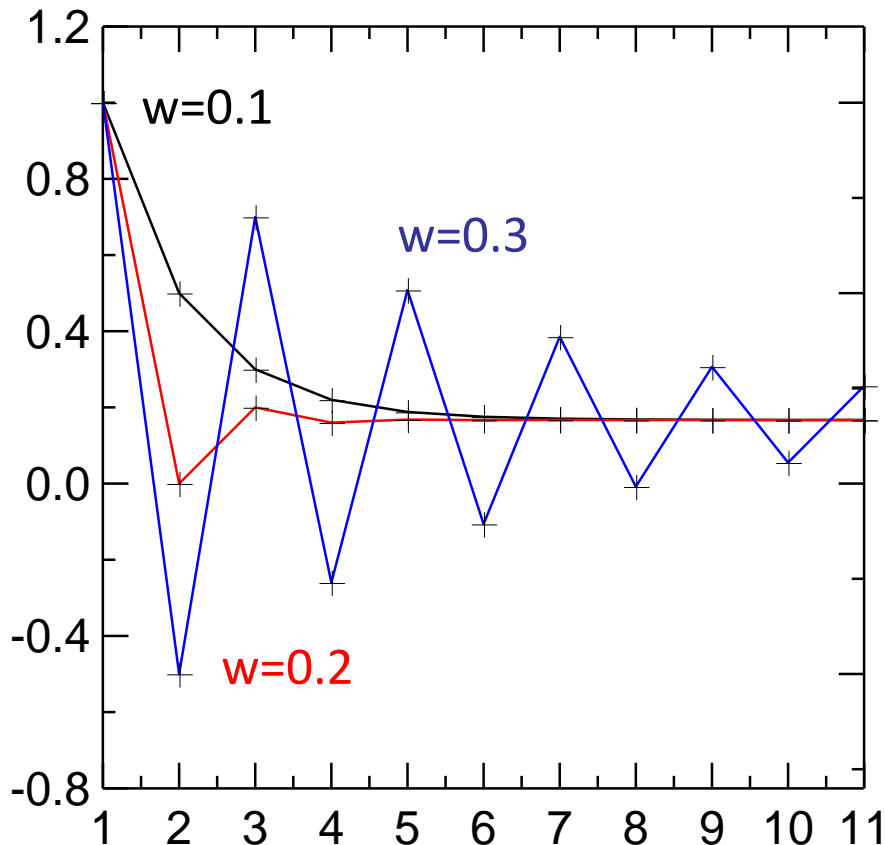
jeśli się zbiegnie –  
to do rozwiązania schematu  
niejawnego

problem początkowy:

$$u' = -100u, \quad u(0) = 1, \quad dt = 0.05$$

z rozwiązaniem dokładnym  $u(t) = \exp(-100t)$

$$u_n^\mu = (1 - w)u_n^{\mu-1} + w \left( u_{n-1} + \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1}) \right)$$



iterujemy  $u(dt)$

wybierając w odpowiedni sposób wagę  $w$ : potrafimy ustabilizować iterację i doprowadzić ją do zbieżności.

$$u_n^\mu = (1 - w)u_n^{\mu-1} + w (u_{n-1} + \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1}))$$

dt=0.01      w=0      (1,0,1,0,1,0)

w=.2 (optymalne dla dt=0.05)

0.8,0.68, 0.608, 0.5648, 0.53888, 0.5233, 0.51399,  
0.50839, 0.50503, 0.503, 0.5018, 0.5010, 0.50065,  
0.50039, ..., 1/2

tutaj optymalne byłoby w=1/2  
(zbieżność w jednej iteracji)

dla w=.7  
0.3,0.58,0.468,0.512,0.4948,0.5003,0.4998

dt=0.001

w=1

1, 0.9, 0.91, 0.909, 0.9091,  
0.90909, 0.909091,  
... 0.90909090909

w=0.2

```

1  0.9799999998752028
2  0.9643999997863173
3  0.952231997235827
4  0.942740956797946
5  0.935337945296528
6  0.929563596356724
7  0.925059604208092
8  0.921546490351203
9  0.918806261557684
10 0.916668883110325
11 0.915001727930422
12 0.913701346897147
13 0.912687049696691
14 0.911895897884623
15 0.911278799474556
16 0.910797462717313
17 0.910422020048698
18 0.910129174768766
19 0.909900755451658
20 0.909722588385279
21 0.909583618074257
22 0.909475221232247
23 0.909390671695937

```

$$u_n^\mu = (1 - w)u_n^{\mu-1} + w (u_{n-1} + \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1}))$$

dt=0.01    w=0    (1,0,1,0,1,0)

w=.2 (optymalne dla dt=0.05)

0.8,0.68, 0.608, 0.5648, 0.53888, 0.5233, 0.51399,  
0.50839, 0.50503, 0.503, 0.5018, 0.5010, 0.50065,  
0.50039, ..., 1/2

dt=0.001

w=1

1, 0.9, 0.91, 0.909, 0.9091, 0.90909, 0.909091,  
... 0.90909090909

w=0.2

1	0.979999998752028
2	0.964399997863173
3	0.952231997235827
4	0.942740956797946
5	0.935337945296528
6	0.929563596356724
7	0.925059604208092
8	0.921546490351203
9	0.918806261557684
10	0.916668883110325
11	0.915001727930422
12	0.913701346897147
13	0.912687049696691
14	0.911895897884623
15	0.911278799474556
16	0.910797462717313
17	0.910422020048698
18	0.910129174768766
19	0.909900755451658
20	0.909722588385279
21	0.909583618074257
22	0.909475221232247
23	0.909390671695937
24	0.909320480305884

tutaj optymalne byłoby w=.5  
(zbieżność w jednej iteracji natychmiastowa)

dl.  
0. Problem:

- 1) w trzeba odpowiednio dobrać (mniejszy krok czasowy, w bliższe 1)
- 2) dla źle dobranego w iteracja może być wolnozbieżna

Proces optymalizacji (np. dynamicznej) w może być kłopotliwy.



$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

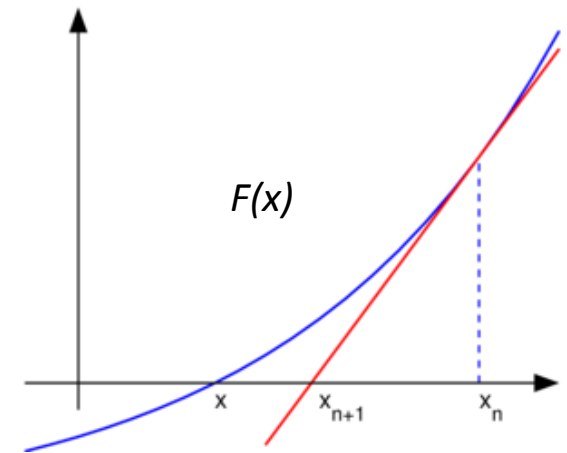
$$u_n = u_{n-1} + f(t_n, u_n) \Delta t$$

Na szczęście nie jesteśmy skazani na iterację funkcjonalną

## 2) metoda Newtona-Raphsona (stycznych)

szukamy zera równania nieliniowego

$$F(u_n) = u_n - u_{n-1} - f(t_n, u_n) \Delta t$$



$$F(x_n + \Delta x) = F(x_n) + \Delta x F'(x_n)$$

$$F(x_n + \Delta x) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n) / F'(x_n)$$

## 2) metoda Newtona-Raphsona

szukamy zera równania nieliniowego

$$F(u_n) = u_n - u_{n-1} - f(t_n, u_n) \Delta t$$

$$F(x_n + \Delta x) = F(x_n) + \Delta x F'(x_n)$$

$$F(x_n + \Delta x) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n) / F'(x_n)$$

$$u_n^\mu = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} - \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1})}{1 - \Delta t f'_u(t_n, u_n^{\mu-1})}$$

## niejawny schemat Eulera z metodą Newtona-Raphsona, zastosowanie

problem początkowy:

$$u' = -100u, \quad u(0) = 1$$

z rozwiązaniem dokładnym  $u(t) = \exp(-100t)$

$$F(u_n) = u_n - u_{n-1} - f(t_n, u_n) \Delta t$$

$$u_n^\mu = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} - \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1})}{1 - \Delta t f'_u(t_n, u_n^{\mu-1})}$$

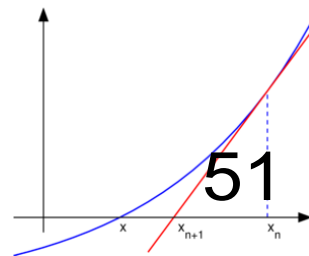
---

$$u_n^\mu = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} + 100 \Delta t u_n^{\mu-1}}{1 + 100 \Delta t}$$

kolejne przybliżenia:  $\Delta t = 0.05$  (jawny Euler stabilny bezwzględnie dla  $\Delta t < 0.02$ )  
1, 0.1666677, 0.1666677 zbieżność w jednej iteracji -  $F$  jest liniowa w  $u$

*Wniosek: dla liniowych  $f$  liniowe jest również  $F$   
wtedy iteracja Newtona zbiega się w jednej iteracji niezależnie od wielkości  $\Delta t$*

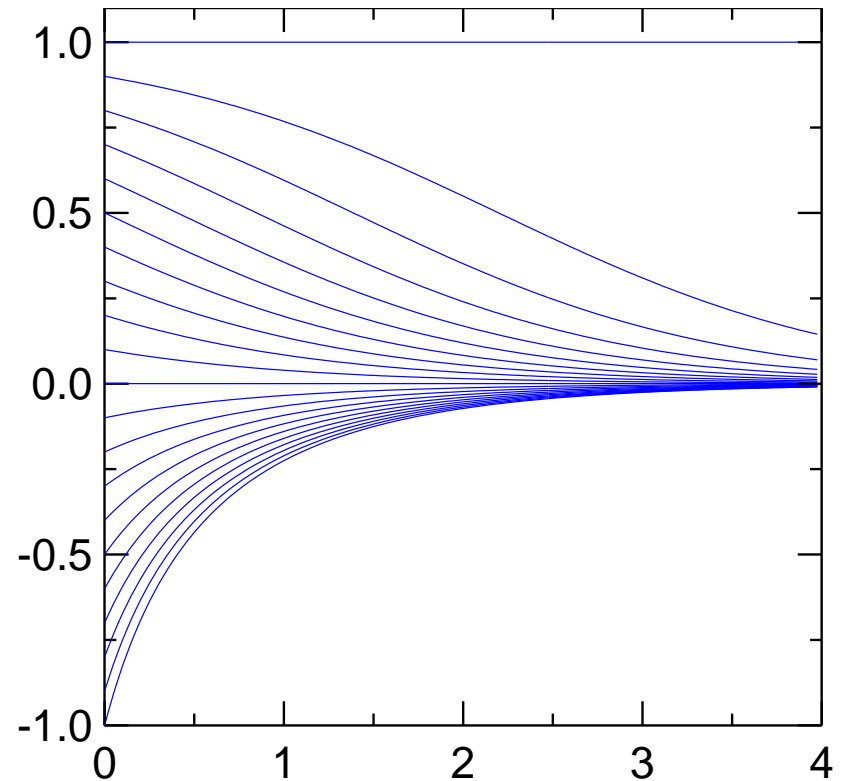
zakres zbieżności: w praktyce  $\Delta t$  znacznie większy  
niż w iteracji funkcjonalnej  
ale: niedostępne proste oszacowane przedziału zbieżności  
w praktyce iteracja Newtona – szybsza i szerzej zbieżna niż iteracja funkcjonalna

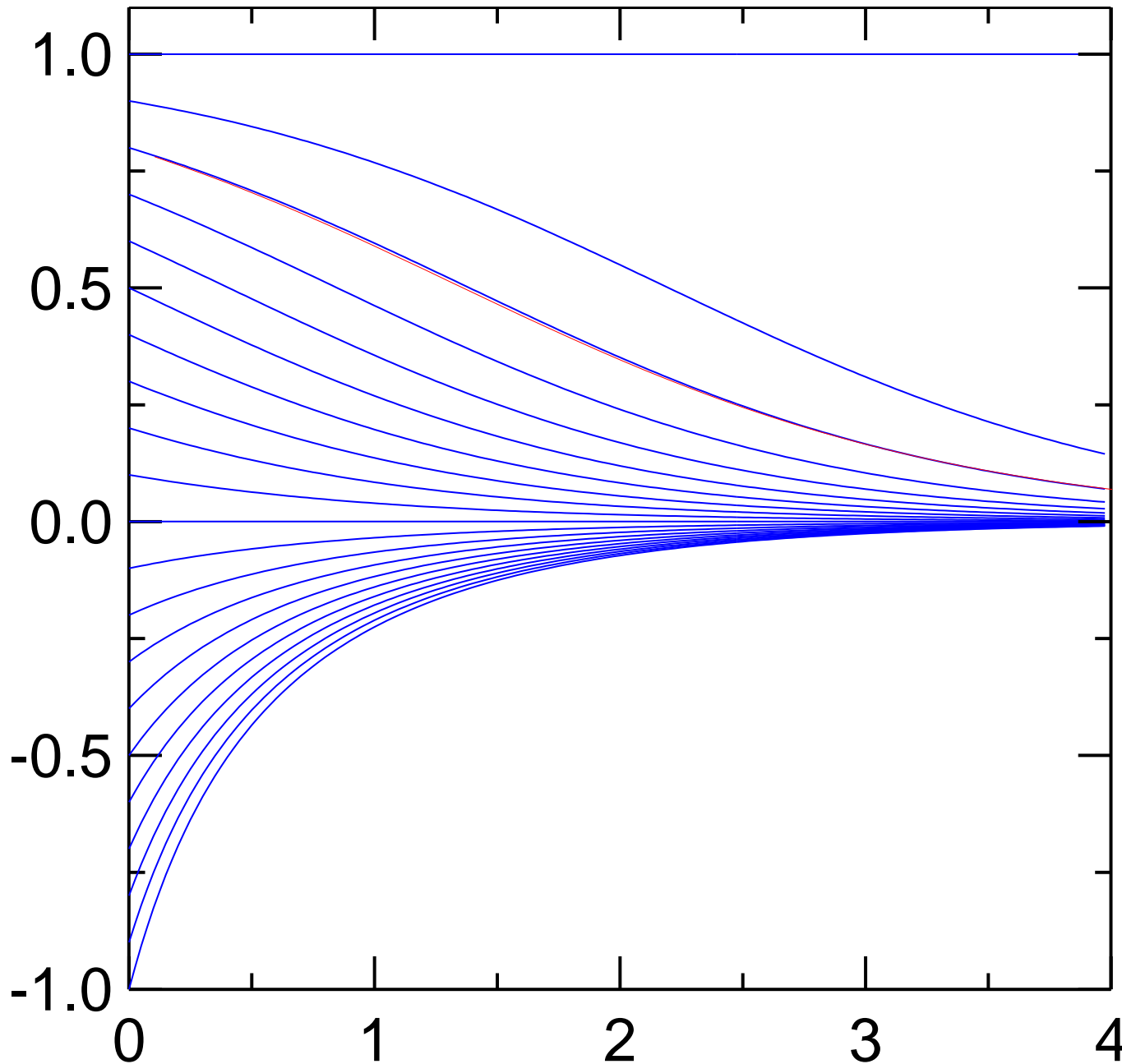


problem początkowy: dla równania:  
 $u' = u(u-1)$

$$u_n^\mu = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} - \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1})}{1 - \Delta t f'_u(t_n, u_n^{\mu-1})}$$

$$u_n^\mu = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} - \Delta t u_n^{\mu-1} (u_n^{\mu-1} - 1)}{1 - \Delta t (2u_n^{\mu-1} - 1)}$$






czerwone  
niejawny  
Euler z krokiem  
 $\Delta t = 0.1$   $u(0) = 0.8$

iteracja dla  
 $u(\Delta t)$  ze  
startem w  
 $u(0)$ :

- 0.80000
- 0.78297
- 0.78300
- 0.78300

## niejawny schemat Eulera z metodą Newtona-Raphsona

$$u_n^\mu = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} - \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1})}{1 - \Delta t f'_u(t_n, u_n^{\mu-1})}$$


gdy przepis funkcyjny nieznan (np. programujemy metodę dla dowolnego  $f$ )  
można szacować z ilorazu różnicowego (poniżej centralny = dokładnie różniczuje parabolę)

$$f'_u(t_n, u_n) = \frac{f(t_n, u_n + du) - f(t_n, u_n - du)}{2du}$$

---

cena zastąpienia dokładnej pochodnej ilorazem różnicowym?  
przy osiągniętej zbieżności - nie zmieni rozwiązania! może tylko spowolnić iterację!  
dla naszego przykładu  $u' = u(u-1)$  centralny iloraz różnicowy zadziała dokładnie dla dowolnego  $du$

żeby przykład był ciekawszy: policzmy pochodną z wstecznego ilorazu różnicowego

$$f'_u(t_n, u_n) = \frac{f(t_n, u_n) - f(t_n, u_n - du)}{du} = 2u - 1 - du$$

$u(0)=0.8$ , pierwszy krok  $t=\Delta t$ :

$$u'=f(u)=u(u-1)$$

metoda Newtona dla pochodnej  $f$  liczonej numerycznie w każdej iteracji:

dokładna pochodna	iloraz wsteczny $du=u/10$	iloraz wsteczny $du=u/2$	przybliżenie w liczeniu pochodnej nie zmienia wyniku do którego iteracja zbiega bo:
0.80000	0.80000	0.80000	
0.78297	0.78312	0.78367	
0.78300	0.78301	0.78303	
0.78300	0.78300	0.78301	
		0.78300	

$$x_{n+1}=x_n-F(x_n)/F'(x_n)$$

niewielko spowalnia iterację

---

numeryczne liczenie pochodnych w każdej iteracji może być kosztowne

$$u_n^\mu = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} - \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1})}{1 - \Delta t f'_u(t_n, u_n^{\mu-1})}$$

w praktyce  
można np. wstawić tutaj  $u_{n-1}$

można również używać oszacowania pochodnej w wielu kolejnych iteracjach  
odnawiać pochodną gdy iteracja zwalnia

$$u_n^\mu = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} - \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1})}{1 - \Delta t f'_u(t_{n-1}, u_{n-1})}$$

zamiast

$$u_n^\mu = u_n^{\mu-1} - \frac{u_n^{\mu-1} - u_{n-1} - \Delta t f(t_n, u_n^{\mu-1})}{1 - \Delta t f'_u(t_n, u_n^{\mu-1})}$$

**iteracja Newtona z pochodną  
liczoną w poprzednim kroku  
(nieiterowaną)**

dla naszego przykładu:  $f(u)=u(u-1)$  z  $dt=0.1$

iterowana pochodna	pochodna brana z punktu $t_{n-1}, u_{n-1}$
$f'_u(t_n, u_n^{\mu-1})$	
0.80000	0.80000
0.78297	0.78297
0.78300	0.78300
0.78300	0.78300

bez różnicy!

dt=0.5		dt=1	
iterowana	z poprzedniego kroku	iterowana	stara
0.8	0.8	0.8	0.8
0.6857	0.6857	0.4	0.4
0.6937	0.6950	0.5333	0.8
0.6937	0.6935	0.5523	0.4
	0.6938	0.5527	0.8
	0.6937	0.5527	

wolniej

brak zbieżności ☹️

w mianowniku:  $1-dt(2u-1)$   
stara: 0.94 , doiterowana 0.9434

stara: 0.7  
doiterowana: 0.806

stara 0.4  
doiterowana 0.89