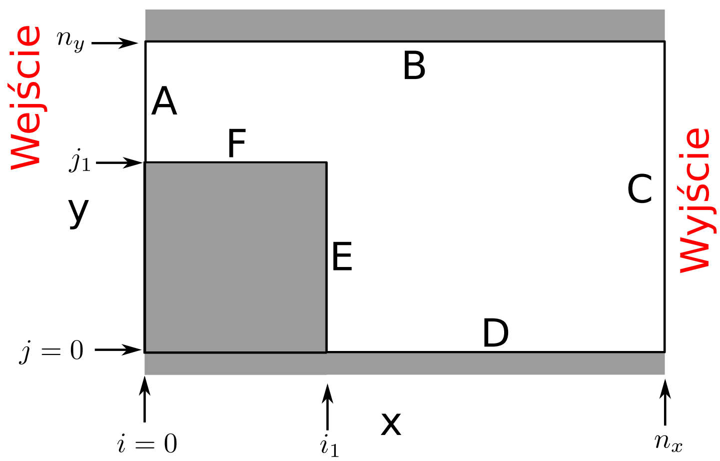
Projekt 7: Równania Naviera-Stokesa - symulacja przepływu cieczy lepkiej.

Tomasz Chwiej, Alina Mreńca-Kolasińska, Elżbieta Strzałka

7 grudnia 2018

1 Wstęp



Rysunek 1: Geometria układu przez który przepływa ciecz lepka. Z lewej strony Wejście (ścianka A), z prawej Wyjście (ścianka C). Szarym kolorem zaznaczono nieprzepuszczalne ścianki, które stanowią brzeg (ścianki: B, D, E, F)

Na zajęciach naszym zadaniem będzie rozwiązanie układu równań Naviera-Stokesa

$$\nabla^2\psi = \zeta \tag{1}$$

$$\mu\nabla^2\zeta = \rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) \tag{2}$$

dla układu pokazanego na rysunku (ρ - gęstość, μ - lepkość, ζ - funkcja wirowości, ψ - funkcja strumienia).

1.1 Dyskretyzacja

Wprowadzamy siatkę równoodległych węzłów

$$\Delta x = \Delta y = \Delta \tag{3}$$

$$x = x_i = \Delta\cdot i, \quad i = 0,1,2,\ldots,n_x \tag{4}$$

$$y = y_j = \Delta\cdot j, \quad j = 0,1,2,\ldots,n_y \tag{5}$$

$$\psi(x,y) = \psi(x_i,y_j) = \psi_{i,j} \tag{6}$$

$$\zeta(x,y) = \zeta(x_i,y_j) = \zeta_{i,j} \tag{7}$$

W równaniach (1) i (2) pochodne zastępujemy ilorazami różnicowymi centralnymi [$df/dx = (f_{i+1} - f_{i-1})/(2\Delta)$, $d^2f/dx^2 = (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})/\Delta^2$] i przegrupowujemy wyrazy tak aby $\psi_{i,j}$ oraz $\zeta_{i,j}$ wyrazić za pomocą pozostałych wyrazów

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{4}\left(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - \Delta^2\zeta_{i,j}\right) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{i,j} &= \frac{1}{4}\left(\zeta_{i+1,j} + \zeta_{i-1,j} + \zeta_{i,j+1} + \zeta_{i,j-1}\right) \\ &- \Omega\frac{\rho}{16\mu}\left[(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i-1,j}) - (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j-1})\right]\end{aligned} \tag{9}$$

Układ równań (8) i (9) rozwiążemy metodą relaksacji Gaussa-Seidla. Uwaga: parametr Ω wprowadzamy do równania (9), aby zapewnić stabilność relaksacji.

1.2 Warunki brzegowe

Zakładamy że prędkość cieczy [$\vec{V} = (u, v)$] na wejściu/wyjściu ma tylko jedną niezerową składową $\vec{V}_{we/wy} = (u_{we/wy}, 0)$. Korzystając z wykładu możemy zapisać

$$u_{we} = \frac{Q_{we}}{2\mu}(y - y_{j_1})(y - y_{n_y}) \tag{10}$$

$$u_{wy} = \frac{Q_{wy}}{2\mu}y(y - y_{n_y}) \tag{11}$$

przy czym gradienty ciśnienia Q_{we} i Q_{wy} muszą się różnić, bo przekroje na we/wy są różne. Korzystając z zasady zachowania masy (strumień wpływający=strumień wypływający) $\int_{we} u_{we}dy = \int_{wy} u_{wy}dy$ dostajemy warunek

$$Q_{wy} = Q_{we}\frac{y_{n_y}^3 - y_{j_1}^3 - 3y_{j_1}y_{n_y}^2 + 3y_{j_1}^2 y_{n_y}}{y_{n_y}^3} \tag{12}$$

1.2.1 WB dla ψ

- brzeg A (wejście)

$$\psi_{0,j} = \frac{Q_{we}}{2\mu}\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}(y_{j_1} + y_{n_y}) + y \cdot y_{j_1} \cdot y_{n_y}\right], \quad i = 0,\ j = j_1, \ldots, n_y \tag{13}$$

- brzeg C (wyjście)

$$\psi_{n_x,j} = \frac{Q_{wy}}{2\mu}\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}y_{n_y}\right] + \frac{Q_{we} \cdot y_{j_1}^2(-y_{j_1} + 3y_{n_y})}{12\mu}, \quad i = n_x, j = 0, 1, \ldots, n_y \tag{14}$$

  Uwaga: drugi wyraz w równaniu (14) zapewnia sklejanie się WB w węzłach $(n_x, 0)$ i (n_x, n_y). Otrzymujemy go z warunku $\psi_{we}(0, y_{j_1}) = \psi_{wy}(x_{n_x}, 0)$.

- brzeg B

$$\psi_{i,n_y} = \psi_{0,n_y}, \quad i = 1, 2, \ldots, n_x - 1,\ j = n_y \tag{15}$$

- brzeg D

$$\psi_{i,0} = \psi_{0,j_1}, \quad i = i_1, \ldots, n_x - 1,\ j = 0 \tag{16}$$

- brzeg E

$$\psi_{i_1,j} = \psi_{0,j_1}, \quad i = i_1,\ j = 1, \ldots, j_1 \tag{17}$$

- brzeg F

$$\psi_{i,j_1} = \psi_{0,j_1}, \quad i = 1, \ldots, i_1,\ j = j_1 \tag{18}$$

1.2.2 WB dla ζ

- brzeg A (wejście)

$$\zeta_{0,j} = \frac{Q_{we}}{2\mu}(2y - y_{j_1} - y_{n_y}), \quad i = 0,\ j = j_1, \ldots, n_y \tag{19}$$

- brzeg C (wyjście)

$$\zeta_{n_x,j} = \frac{Q_{wy}}{2\mu}(2y - y_{n_y}), \quad i = n_x,\ j = 0, \ldots, n_y \tag{20}$$

- brzeg B

$$\zeta_{i,n_y} = \frac{2}{\Delta^2}[\psi_{i,n_y-1} - \psi_{i,n_y}], \quad i = 1, \ldots, n_x - 1 \tag{21}$$

- brzeg D

$$\zeta_{i,0} = \frac{2}{\Delta^2}[\psi_{i,1} - \psi_{i,0}], \quad i = i_1 + 1, \ldots n_{x-1} \tag{22}$$

- brzeg E

$$\zeta_{i_1,j} = \frac{2}{\Delta^2}[\psi_{i_1+1,j} - \psi_{i_1,j}], \quad j = 1, \ldots j_1 - 1 \tag{23}$$

- brzeg F

$$\zeta_{i,j_1} = \frac{2}{\Delta^2}[\psi_{i,j_1+1} - \psi_{i,j_1}], \quad i = 1, \ldots i_1 \tag{24}$$

- wierzchołek E/F

$$\zeta_{i_1,j_1} = \frac{1}{2}[\zeta_{i_1-1,j_1} + \zeta_{i_1,j_1-1}] \tag{25}$$

2 Algorytm relaksacji równań NS

Zgodnie z równaniem (1) możemy zapisać:

$$\nabla^2\psi - \zeta = \delta \tag{26}$$

Wartość parametru δ powinna maleć w trakcie relaksacji teoretycznie do zera, co możemy wykorzystać do kontroli zbieżności, np. całkując błąd w wybranych węzłach

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{n_x-1} [\psi_{i+1,j_2} + \psi_{i-1,j_2} + \psi_{i,j_2+1} + \psi_{i,j_2-1} - 4\psi_{i,j_2} - \Delta^2\zeta_{i,j_2}], \quad j_2 = j_1 + 2 \tag{27}$$

Relaksację można przeprowadzić opierając się na poniższym pseudokodzie (z kontrolą błędu Γ - wyświetlaną na ekranie)

```
ustalamy WB: ψ
FOR IT=1 TO IT_MAX STEP 1 DO

    IF(IT < 2000) THEN
        Ω = 0
    ELSE
        Ω = 1
    END IF

    FOR i=1 TO n_X − 1 STEP 1 DO
      FOR j=1 TO n_Y − 1 STEP 1 DO
        IF(  (i,j) ≠ BRZEG  )THEN
            ψ_{i,j} = wzór (8)
```

```
        ζ_{i,j} = wzór (9)
      END IF
    END DO
  END DO

  modyfikacja WB: ζ
  kontrola błędu: Γ

END DO
```

3 Zadania do wykonania

1. W obliczeniach należy użyć wartości parametrów: $\Delta = 0.01$, $\rho = 1$, $\mu = 1$, $n_x = 200$, $n_y = 90$, $i_1 = 50$, $j_1 = 55$, $IT\_MAX = 20000$

2. Napisać dwie funkcje, w których zmieniane będą WB dla ψ i ζ.

3. Zaimplementować algorytm relaksacji równań NS.

   Uwaga: dla $it < 2000$, zakładamy że $\Omega = 0$ co oznacza, że wyłączamy chwilowo drugi wyraz w rów. (9), bo może on powodować niestabilność. Dla $it > 2000$, gdy ψ i ζ w pewnym stopniu się ustabilizują, włączamy ten wyraz ($\Omega = 1$) do obliczeń i kontynuujemy relaksację.

4. Wykonać relaksację równań NS dla $Q = -1000$. Po jej zakończeniu sporządzić: wykres konturowy ψ, wykres konturowy ζ, mapę rozkładu składowej poziomej prędkości $u(x, y) = \partial\psi/\partial y$, mapę rozkładu składowej pionowej prędkości $v(x, y) = -\partial\psi/\partial x$. (60 pkt)

5. Wykonać relaksację równań NS dla $Q = -4000$ i sporządzić rysunki jak w poprzednim punkcie. Dobrać tak ilość konturów aby na wykresie ψ był wyraźnie widoczny wir. (30 pkt)

6. Wykonać relaksację równań NS dla $Q = +4000$ (odwracamy przepływ: ciecz płynie w lewo). Sporządzić wykres konturowy ψ - czy wir utworzy się przed przeszkodą? (10 pkt)