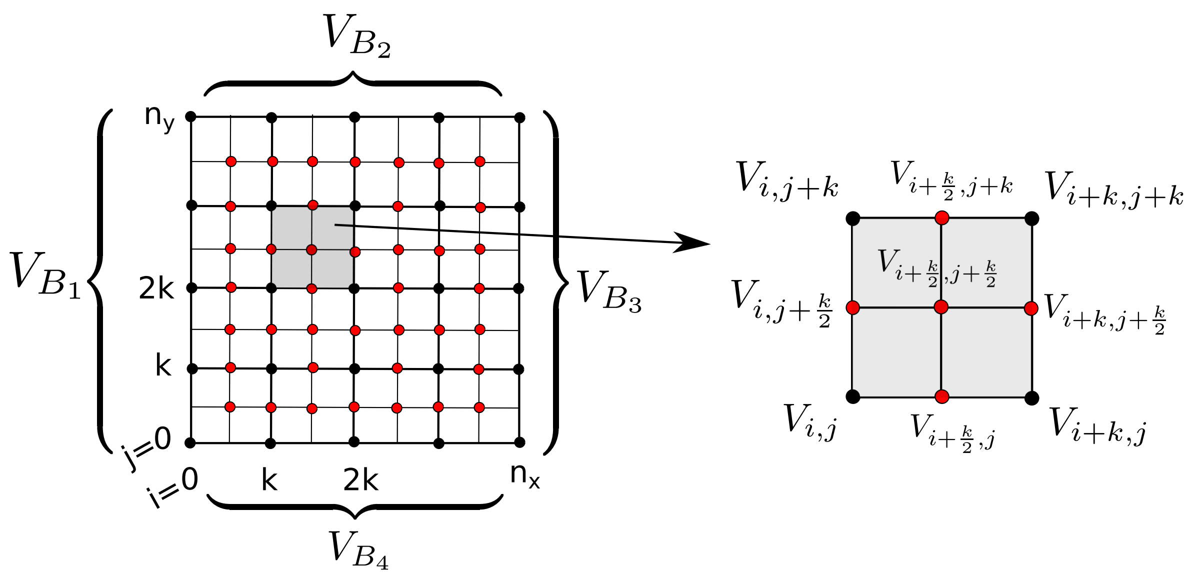
Projekt 5: Równanie Poissona - relaksacja wielosiatkowa.

Tomasz Chwiej

28 listopada 2018

1 Wstęp



Rysunek 1: Siatka obliczeniowa dla kroku k (czarne węzły) i kroku $k/2$ (czerwone węzły). Warunki brzegowe są typu Dirichleta: $V_{B_1}(y)$ na lewym brzegu, $V_{B_2}(x)$ na górnym brzegu, $V_{B_3}(y)$ na prawym brzegu i $V_{B_4}(x)$ na dolnym brzegu. Rysunek po prawej stronie pokazuje rozmieszczenie starych (czarny) i nowych (czerwony) węzłów w komórce o boku k.

Na zajęciach wyznaczymy rozkład potencjału w obszarze pokazanym na rys.1 rozwiązując równanie Poissona

$$\nabla^2 V = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{1}$$

metodą relaksacji wielosiatkowej. Zakładamy, że gęstość $\rho = 0$, wobec czego o rozkładzie potencjału decydować będą wyłącznie warunki brzegowe (typu Dirichleta).

1.1 Dyskretyzacja

Dyskretyzację równania Poissona wykonujemy jak na poprzednich zajęciach. Najpierw wprowadzamy siatkę węzłów (najgęstszą) i określamy wielkości na siatce

$$x \rightarrow x_i = \Delta x \cdot i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n_x \tag{2}$$

$$y \rightarrow y_j = \Delta y \cdot j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n_y \tag{3}$$

$$V(x, y) \rightarrow V(x_i, y_j) = V_{i,j} \tag{4}$$

Zakładając

$$\Delta x = \Delta y = \Delta \tag{5}$$

otrzymujemy podstawowy przepis relaksacji

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}\right) \tag{6}$$

który modyfikujemy tak aby wykonywać na siatce kroki o długości $k \cdot \Delta$ (w 'x' i 'y')

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V_{i+k,j} + V_{i-k,j} + V_{i,j+k} + V_{i,j-k}\right), \quad \begin{array}{l} i = k, 2k, \ldots, nx - k \\ j = k, 2k, \ldots, ny - k \end{array} \tag{7}$$

Proces relaksacji zaczynamy od znalezienia rozwiązania na najrzadszej siatce ($k = k_{max}$), następnie przechodzimy na siatkę dwukrotnie gęstszą, na której powtarzamy obliczenia ($k = k_{max}/2$) zaczynając od rozwiązania uzyskanego na rzadszej siatce (+przybliżone rozwiązanie w nowych węzłach). Proces zmiany siatki i następującej po niej relaksacji powtarzamy aż do uzyskania rozwiązania na najgęstszej siatce ($k = 1$).

1.2 Zagęszczanie siatki

Zagęszczanie siatki pokazane jest schematycznie na rys.1. Aby wyznaczyć przybliżoną wartość potencjału w nowych (czerwonych) węzłach dokonujemy interpolacji liniowej wartości z najbliższych sąsiadów danego węzła

$$V_{i+\frac{k}{2},j+\frac{k}{2}} = \frac{1}{4}\left(V_{i,j} + V_{i+k,j} + V_{i,j+k} + V_{i+k,j+k}\right) \tag{8}$$

$$V_{i+k,j+\frac{k}{2}} = \frac{1}{2}\left(V_{i+k,j} + V_{i+k,j+k}\right) \tag{9}$$

$$V_{i+\frac{k}{2},j+k} = \frac{1}{2}\left(V_{i,j+k} + V_{i+k,j+k}\right) \tag{10}$$

$$V_{i+\frac{k}{2},j} = \frac{1}{2}\left(V_{i,j} + V_{i+k,j}\right) \tag{11}$$

$$V_{i,j+\frac{k}{2}} = \frac{1}{2}\left(V_{i,j} + V_{i,j+k}\right) \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

1.3 Warunek stopu

Całkę funkcjonalną dla równania Poissona

$$S = \iint dx\, dy \left(\frac{1}{2}\vec{E}^2 - \rho \cdot V\right) \tag{14}$$

której wartość osiąga minimum dla potencjału V będącego dokładnym rozwiązaniem tego równania, zapisujemy w wersji dyskretnej, przy czym ilorazy różnicowe dla operatorów d/dx i d/dy uśredniamy po każdej komórce o boku $k \cdot \Delta$ (tak aby objętość po której całkujemy była taka sama dla każdego k)

$$
\begin{aligned}
S^{(k)} &= \sum_{i=0}^{n_x-k} \sum_{j=0}^{n_y-k} \frac{(k \cdot \Delta)^2}{2} \left[\left(\frac{V_{i+k,j} - V_{i,j}}{2 \cdot k \cdot \Delta} + \frac{V_{i+k,j+k} - V_{i,j+k}}{2 \cdot k \cdot \Delta} \right)^2 + \left(\frac{V_{i,j+k} - V_{i,j}}{2 \cdot k \cdot \Delta} + \frac{V_{i+k,j+k} - V_{i+k,j}}{2 \cdot k \cdot \Delta} \right)^2 \right] \\
& dla \quad i = 0, k, 2k, 3k, \ldots, n_x - k, \quad j = 0, k, 2k, 3k, \ldots, n_y - k
\end{aligned} \tag{15}
$$

Relaksację na siatce o indeksie k prowadzimy aż do spełnienia warunku

$$
\left| \frac{S_{it}^{(k)} - S_{it-1}^{(k)}}{S_{it-1}^{(k)}} \right| < TOL \tag{16}
$$

gdzie: it - numer iteracji, TOL - mała liczba.

2 Zadania do wykonania

1. Przyjmujemy wartości parametrów: $\Delta = 0.2$, $n_x = 128$, $n_y = 128$, $x_{max} = \Delta \cdot n_x$, $y_{max} = \Delta \cdot n_y$, $TOL = 10^{-8}$ oraz warunki brzegowe Dirichleta:

$$
V_{B_1}(0, y) = (+1) \cdot \sin\left(\pi \frac{y}{y_{max}}\right) \tag{17}
$$

$$
V_{B_2}(x, y_{max}) = (-1) \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{x_{max}}\right) \tag{18}
$$

$$
V_{B_3}(x_{max}, y) = (+1) \cdot \sin\left(\pi \frac{y}{y_{max}}\right) \tag{19}
$$

$$
V_{B_4}(x, 0) = (+1) \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{x_{max}}\right) \tag{20}
$$

2. Rozwiązać równanie Poissona z zadanymi WB metodą wielosiatkową dla $k = 16, 8, 4, 2, 1$. Dla każdego k po spełnieniu warunku stopu sporządzić mapę potencjału (5 map). (60 pkt) Dla każdego k zapisać do pliku wartości całki funkcjonalnej w funkcji numeru iteracji. Sporządzić wykres zmian $S^{(k)}(it)$ dla wszystkich k na jednym rysunku. (40 pkt)

Uwaga 1: Wszystkie obliczenia wykonujemy korzystając z jednej tablicy potencjału (jak dla najgęstszej siatki), w której poruszamy się z aktualnym krokiem k.
Uwaga 2: Warunki brzegowe wyznaczamy tylko raz - przed rozpoczęciem relaksacji na najrzadszej siatce. WB określamy dla każdego węzła brzegowego (jak dla $k = 1$). Po określeniu WB, zerujemy potencjał w każdym węźle ($k = 1$) wewnątrz obszaru (start metody).
Uwaga 3: Po uzyskaniu samouzgodnienia na siatce o indeksie k, zagęszczamy siatkę tj. w nowych węzłach (czerwonych) wpisujemy wartości interpolowane. Jest to potencjał startowy dla relaksacji na gęstszej siatce, gdyż stanowi on (na ogół) dobre przybliżenie dokładnego rozwiązania.