Projekt 10: Równanie falowe - symulacja drgań struny metodą Verleta.

Tomasz Chwiej

11 stycznia 2019

1 Wstęp

Na zajęciach rozwiążemy równanie falowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \cdot a_F(x,t) \tag{1}$$

czyli znajdziemy zależność $u(x,t)$, które jest wychyleniem struny w punkcie x w chwili t, dla określonych warunków brzegowych i początkowych. W równaniu (1), $\beta \geqslant 0$ jest współczynnikiem tłumienia, a $\alpha \cdot a_{F(x,t)}$ wymuszeniem, dla którego przyjmiemy

$$\alpha = 0;\, 1 \tag{2}$$

$$a_F(x,t) = \cos\left(\frac{50 \cdot t}{t_{max}}\right) \cdot \delta_{x,x_F} \tag{3}$$

δ_{x,x_F} to delta Kroneckera (wymuszenie jest punktowe), a t_{max} to czas trwania symulacji.

2 Dyskretyzacja, schemat Verleta, warunki brzegowe i początkowe, energia, algorytm

2.1 Dyskretyzacja

Obliczenia będziemy prowadzić na jednowymiarowej siatce przestrzennej. Wprowadzamy zatem siatkę węzłów w przestrzeni i na osi czasu

$$t = t_n = \Delta t \cdot n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, n_t \tag{4}$$

$$x = x_i = \Delta \cdot i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n_x \tag{5}$$

$$u(x,t) = u(x_i, t_n) = u_i^n \tag{6}$$

2.2 Schemat Verleta

W schemacie Verleta kolejno wyznaczamy całe tablice

$$a^n \rightarrow v^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow u^{n+1} \rightarrow a^{n+1} \rightarrow v^{n+1} \tag{7}$$

gdzie elementy tablic dla danego węzła i liczymy zgodnie z poniższymi wzorami

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^n + \frac{\Delta t}{2} a_i^n \tag{8}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t v_i^{n+\frac{1}{2}} \tag{9}$$

$$v_i^{n+1} = v_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} a_i^{n+1} \tag{10}$$

Przyśpieszenie $a^n = \partial^2 u^n/\partial t^2$ to lewa strona równania (1), zatem możemy je wyznaczyć obliczając jego prawą stronę, w której pochodne zastępujemy ilorazami różnicowymi

$$a_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta^2} - \beta \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + \alpha \cdot a_{F,i}^n \tag{11}$$

Jeśli wyznaczymy u^{n+1} to identycznie wyznaczamy a^{n+1} (zastępując indeks n przez $n+1$).

2.3 Warunki brzegowe

Przyjmujemy sztywne warunki brzegowe, co oznacza że struna jest zaczepiona na początku i na końcu

$$u(0,t) = u(x_{max},t) = 0 \tag{12}$$

$$v(0,t) = v(x_{max},t) = 0 \tag{13}$$

2.4 Warunek początkowy

Ponieważ rozwiązujemy problem z czasem, konieczne jest podanie warunków początkowych (WP) tj. kształtu struny $u(x,t)$ i rozkładu prędkości wzdłuż struny $v(x,t)$ dla chwili $t=0$. Na początku jako WP przyjmijmy, że wychylenie struny ma rozkład gaussowski bez prędkości początkowej

$$u(x,t=0) = \exp\left[-\frac{(x-x_A)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{14}$$

$$v(x,t=0) = 0 \tag{15}$$

parametry x_A i σ to odpowiednio: środek cieżkości funkcji gaussowskiej oraz jej rozmycie przestrzenne (wartości x_A i σ podane są w sekcji [3]).

2.5 Energia

Jednym z parametrów kontrolnych w symulacji jest energia zgromadzona w strunie

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{x_{max}} v^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_0^{x_{max}} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx \tag{16}$$

którą wyznaczymy stosując wzór złożony trapezów

$$E^n = \frac{\Delta}{4}\left[\left(\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta}\right)^2 + \left(\frac{u_{n_x}^n - u_{n_x-1}^n}{\Delta}\right)^2\right] + \frac{\Delta}{2}\sum_{i=1}^{n_x-1}\left[(v_i^n)^2 + \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta}\right)^2\right] \tag{17}$$

Dla $\alpha = \beta = 0$, wartość energii powinna być stała (z dokładnością do niewielkich błędów numerycznych).

2.6 Algorytm

Pseudokod dla równania falowego

```
inicjalizacja: n_x, n_t, Δ, Δt, β, α
utwórz tablice 1D: u0, u, v, v_p, a
określ warunki brzegowe:   u, v
określ warunki początkowe: u, v
zachowaj poprzedni wynik:  u0 = u

wyznacz (inicjalizacja): a = wzór (11) (czytaj:a = a^n, u = u^n, u0 = u^{n-1})

FOR n=1 TO n_t STEP 1 DO
```

$v_p = v + \frac{\Delta t}{2} a$
$u0 = u$ (zachowujemy poprzedni wynik)
$u = u + \Delta t\, v_p$
$a =$ wzór (11)
$v = v_p + \frac{\Delta t}{2} a$
licz: $E =$ wzór (17)
zapis do plików: E, u
END DO

3 Zadania do wykonania

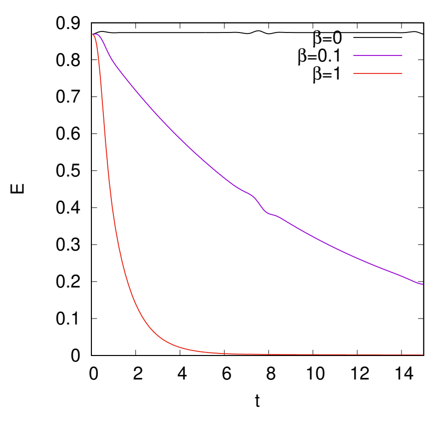
1. W obliczeniach proszę użyć następujących wartości parametrów: $n_x = 150$, $n_t = 1000$, $\Delta = 0.1$, $\Delta t = 0.05$, $x_A = 7.5$, $\sigma = 0.5$.

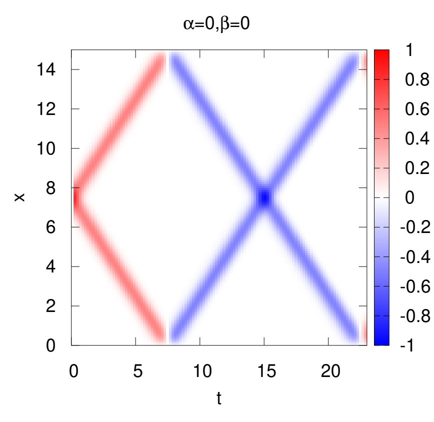
2. Zaimplementować algorytm Verleta dla równania falowego.

3. Znaleźć rozwiązanie równania falowego $u(x,t)$ dla $t \in [0, \Delta t \cdot n_t]$ i sporządzić wykres $E(t)$ oraz mapę $u(x,t)$ dla
   - $\alpha = 0$ i $\beta = 0$ (40 pkt)
   - $\alpha = 0$ i $\beta = 0.1$ (20 pkt)
   - $\alpha = 0$ i $\beta = 1$ (20 pkt)

4. Znaleźć rozwiązanie równania falowego $u(x,t)$ dla $t \in [0, \Delta t \cdot n_t]$ i sporządzić wykres $E(t)$ oraz mapę $u(x,t)$ dla $\alpha = 1$, $\beta = 1$, warunku początkowego $u(x,t=0) = v(x,t=0) = 0$ oraz $x_F = 2.5$ [wzór (3)]. Sporządzić wykres $E(t)$ oraz mapę $u(x,t)$. (20 pkt)

4 Przykładowe wyniki





Rysunek 1: (lewy) Zmiany energii zgromadzonej w strunie dla $\alpha = 0$ oraz kilku wartości parametru β. (prawy) Mapa $u(x,t)$ dla $\alpha = \beta = 0$ - zmiana koloru przy odbiciu od ścianki oznacza zmianę kierunku wychylenia ze względu na sztywne WB.