

W9. Elektrodynamika: **postać całkowa równań Maxwella,
równanie Poissona/Laplace'a
magnetostatyka**

Plan wykładu:

- przejście od postaci różniczkowej do całkowej
- przykłady zastosowań równań w postaci całkowej
- transformacja Lorentza w magnetostatyce
- równania Poissona i Laplace'a
- metoda separacji zmiennych dla równania Laplace'a
- prawo Biota-Savarta
- magnetostatyczne warunki brzegowe
- rozwinięcie multipolowe potencjału wektorowego

Równania Maxwella w postaci całkowej uzyskamy z ich postaci różniczkowej wykorzystując tw. Gaussa

$$\int_V \nabla \cdot \vec{W} dV = \int_{\Sigma} \vec{W} \cdot d\vec{\sigma}$$

oraz tw. Stokesa

$$\oint_C \vec{W} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{W} \cdot d\vec{S}$$

Pierwsze równanie Maxwella

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

przekształcamy korzystając z tw. Stokesa

$$\vec{W}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Drugie równanie Maxwella

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

przekształcamy używając tw. Gaussa

$$\vec{W}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$$

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$$

Trzecie równanie Maxwella

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

przekształcamy używając tw. Gaussa

$$\vec{W}(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r})$$

$$\int_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \vec{D} dV = \int_V \rho dV = q$$

q – ładunek zawarty w objętości V (otoczony powierzchnią Σ)

Czwarte równanie Maxwella

$$\nabla \times \vec{H} = \dot{\vec{D}} + \vec{j}$$

przekształcamy używając twierdzenia Stokesa

$$\vec{W}(\vec{r}) = \vec{H}(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \iint_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_S (\dot{\vec{D}} + \vec{j}) \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} + I \end{aligned}$$

I – prąd ograniczony konturem C

Równania Maxwella w postaci całkowej

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

$$\int_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = q$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} + I$$

+ równanie ciągłości

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma}$$

Zastosowanie równań Maxwella w postaci całkowej

Postać całkowa jest szczególnie użyteczna gdy rozważania dotyczą układów o wysokiej symetrii.

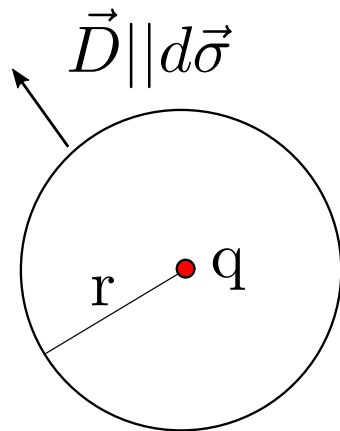
Prawo Coulomba - znajdziemy rozkład pola wokół ładunku punktowego

- ładunek q umieszczamy w początku układu współrzędnych – mamy wyróżniony punkt
- rozkład pola powinien mieć symetrię sferyczną

Wektor D powinien mieć zatem składową tylko w kierunku radialnym

$$\vec{D}(\vec{r}) = D(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Jako powierzchnię zamkniętą wybieramy sferę o promieniu r



$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = q \quad \Rightarrow \quad D \int_S dS = q$$

$$D 4\pi r^2 = q$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Potencjał skalarny pochodzący od ładunku punktowego

Znając relację pomiędzy ładunkiem q i polem elektrycznym je generującym znajdziemy potencjał

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Jeśli zaniedbamy pochodną czasową (pole elektrostatyczne), wówczas potencjał możemy wyznaczyć z

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

... ale z własności niejednoznaczności **czteropotencjału**

$$\vec{\tilde{A}} = \vec{A} + \frac{1}{c}\nabla f$$

wynika że do potencjału możemy dodać stałą

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

Potencjał wektorowy nie będzie zależał od czasu jeśli

$$\frac{\partial\vec{\tilde{A}}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla f = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla f = 0$$

Potencjał wektorowy nie będzie zależał od czasu jeśli **(wynik z poprzedniej strony)**

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla f = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla f = 0$$

funkcja f jest niezależna od czasu albo od położenia

- f niezależne od czasu → potencjał nie ulega zmianie
- f zależne od czasu → do potencjału dodajemy stałą

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi + const$$

Jako punkt odniesienia przyjmujemy punkt w nieskończoności

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = 0$$

policzmy różniczkę zupełną potencjału

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\vec{r} \cdot \nabla \varphi$$

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \nabla \varphi = -d\vec{r} \cdot \vec{E} = -E dr$$

$$\varphi(r) = \int d\varphi = - \int_{\infty}^r E(r') dr' = - \int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \Big|_{\infty}^r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Układ ładunków punktowych

Układ nie posiada symetrii sferycznej i nie możemy skorzystać z prawa Gaussa.

W takim przypadku możemy wykorzystać **zasadę superpozycji**.

Ponieważ równania Maxwella są liniowe, możemy liczyć przyczynki pochodzące od poszczególnych składników układu (źródeł pola) a potem je dodać

Pola wektorowe i pola skalarne traktujemy jako addytywne.

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

\vec{r}_i – położenie źródeł

\vec{r} – punkt pomiaru

Ciągły rozkład gęstości ładunku

Potencjał możemy liczyć jak poprzednio tj. zakładamy jego znikanie w nieskończoności

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = 0$$

oraz korzystamy z **zasady superpozycji** dokonując przejścia

$$q_i \rightarrow dq = \rho(\vec{r}') dV' = \rho(\vec{r}') d^3 r'$$

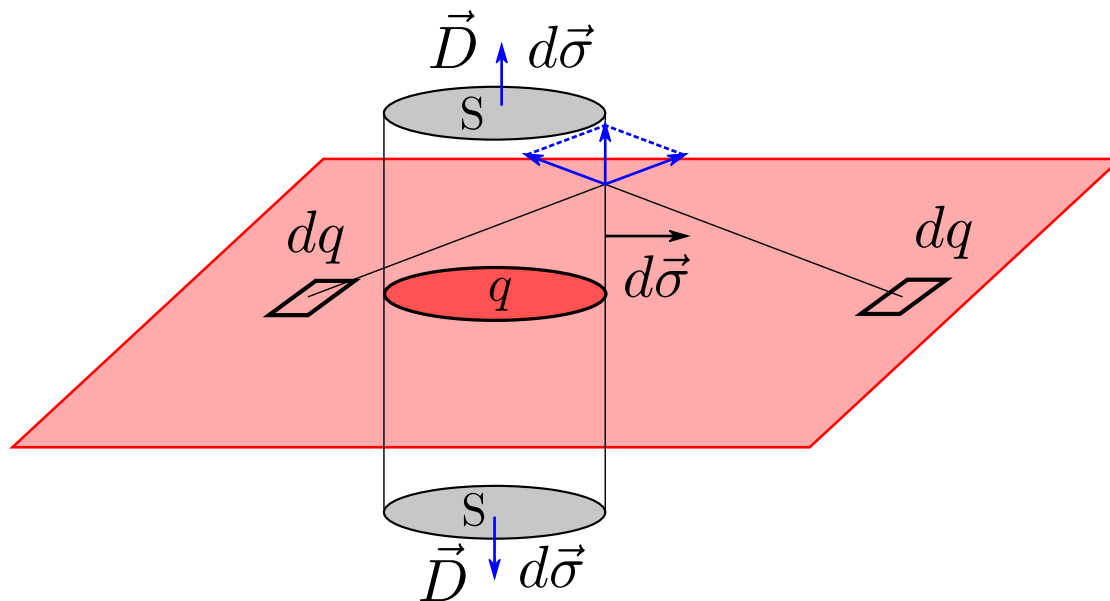
wówczas sumę po ładunkach zastępujemy całką po objętości

$$\varphi(\vec{r}) = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'$$

Przykład. Jednorodnie naładowana płaszczyzna

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \rho dV = q$$



Wkład do całki powierzchniowej wnoszą tylko górna i dolna powierzchnia S

$$2SD = q$$

Ilość ładunku q wyznaczmy z gęstości powierzchniowej

$$q = S\rho \quad (\rho = \rho_{2D})$$

co daje zależność

$$D = \frac{\rho}{2}$$

- pole od jednorodnie naładowanej płyty (płaszczyzny) jest jednorodne i nie zależy od wysokości nad nią

Przykład. Kondensator płaski

Pole elektryczne generowane przez naładowaną płaszczyznę już znamy.
Dodajmy drugą płytę, ale ujemnie naładowaną.

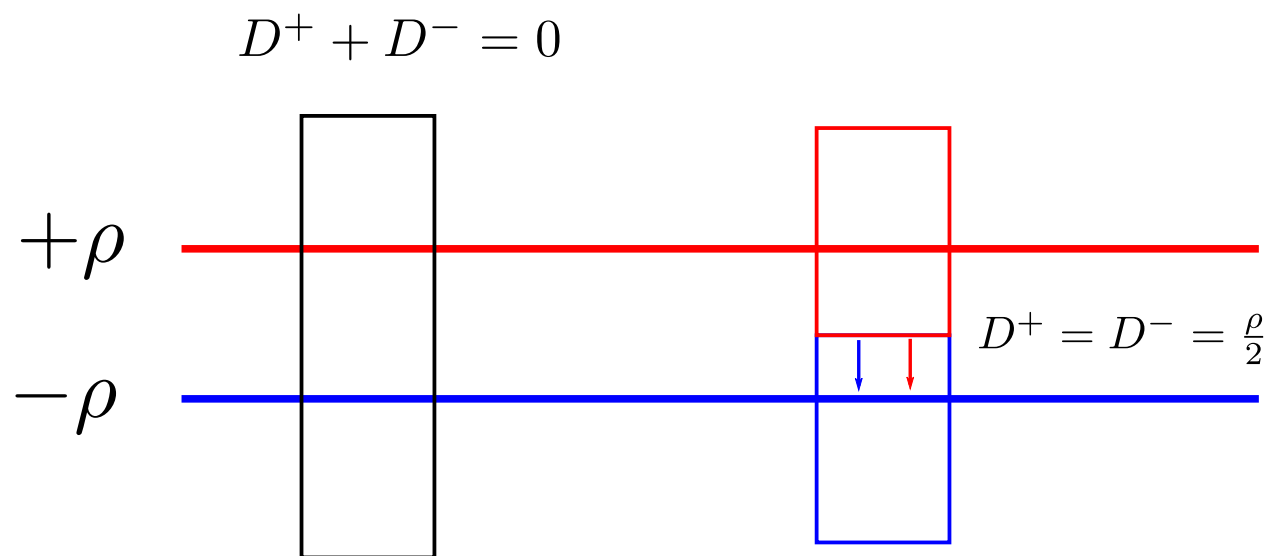
Korzystamy z **zasady superpozycji**

D^+ - wkład od górnej dodatnio naładowanej płyty

D^- - wkład od dolnej ujemnie naładowanej płyty

Powyżej górnej i poniżej dolnej okładki dostaniemy

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V (\rho_1 + \rho_2) dV = 0$$



Wypadkowe pole między okładkami

$$D = D^+ + D^- = \rho$$

uzyskane rozwiązanie jest prawdziwe z dala od brzegów

Przykład. Pole elektryczne wokół jednorodnie naładowanego pręta

S – pole przekroju drutu

ρ - gęstość przestrzenna ładunku

$$(\rho = \rho_{3D})$$

Korzystamy z prawa Gaussa

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{\sigma} = \int_V \rho dV$$

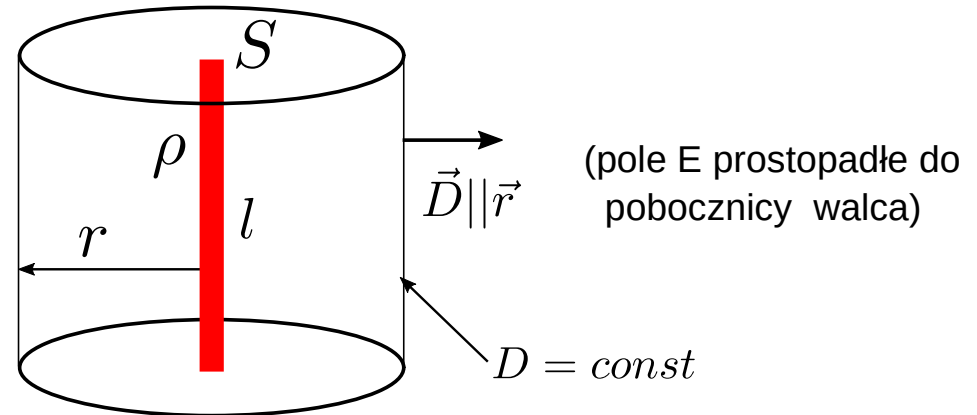
Powierzchnia zamknięta – walec o wysokości l i promieniu r

Jeśli przyjmujemy, że

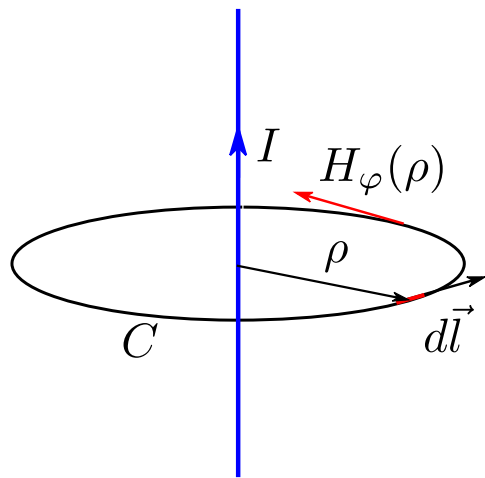
$$l \gg r$$

to wkład do całki powierzchniowej wnosi tylko pobocznicą walca

$$2\pi r l D = \rho S l \qquad D = \frac{\rho S}{2\pi r}$$



Zastosowanie praw Maxwella w postaci całkowej w magnetostatyce



symetria obrotowa
+ translacyjna:

$$H_\rho(\rho, \varphi, z)$$

$$H_\varphi(\rho, \varphi, z)$$

$$H_z(\rho, \varphi, z)$$

Przez drut płynie prąd o natężeniu I .
Prąd jest źródłem pola magnetycznego.

Odpowiednie równanie Maxwella

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} + I$$

Przy braku zależności czasowej pól

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad \vec{j} = [0, 0, j_z], \quad j_z \neq 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho \hat{e}_\varphi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_\rho & \rho H_\varphi & H_z \end{vmatrix}$$

$$j_\rho = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho H_\varphi}{\partial z} \right) = 0$$

$$j_\varphi = \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = 0$$

$$j_z = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho H_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho H_\varphi}{\partial \rho} \neq 0$$

$$H_\rho(\rho) = ?$$

nie daje wkładu do całki

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad H_\rho \hat{e}_\rho \cdot dl \hat{e}_\varphi = 0$$

Pozostaje wkład od składowej j_z

$$j_z = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho H_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho H_\varphi}{\partial \rho} \neq 0 \quad \vec{j} = [0, 0, j_z], \quad j_z \neq 0$$

Całkujemy po powierzchni otoczonej krzywą zamkniętą

$$\iint_S \vec{j} d\vec{S} = \iint_S j_z dS = I$$

Składową j_z możemy zastąpić pochodną H_φ i policzyć całkę jeszcze raz

$$\iint_S j_z dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\rho \frac{1}{\rho'} \frac{\partial \rho' H_\varphi}{\partial \rho'} \rho' d\rho' = 2\pi \rho H_\varphi = I$$

element powierzchni

$$dS = \rho d\varphi \cdot d\rho$$

$$2\pi \rho H_\varphi = I$$

$$H_\varphi = H_\varphi(\rho) = \frac{I}{2\pi \rho}$$

Transformacja Lorentza w magnetostatyce

Rozważmy przepływ ładunku w przewodniku z punktu widzenia mechaniki relatywistycznej

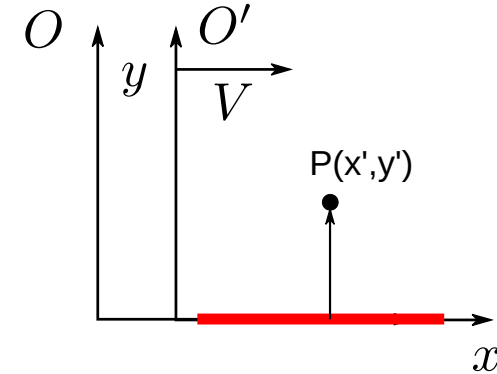
W układzie O' :

- spoczywa naładowany pręt z gęstością ρ
- pręt wytwarza tylko pole elektryczne

$$D'_y = \frac{\rho S}{2\pi y'}$$

W układzie O :

- pręt (ładunek) porusza się z prędkością V
- poruszający się ładunek wytwarza pole elektryczne i magnetyczne



$$E_y = \gamma E'_y + \gamma \beta c B'_z = \gamma E'_y$$

$$B_z = \gamma B'_z + \gamma \frac{\beta}{c} E'_y = \gamma \frac{\beta}{c} E'_y$$

Dla prędkości nierelatywistycznych mamy

$$\gamma = 1$$

prędkość

$$V\rho = j$$

$$E_y = E'_y$$

$$B_z = \frac{V}{c^2} E'_y = \mu_0 \epsilon_0 V E'_y = \mu_0 V D'_y = \mu_0 V \frac{\rho S}{2\pi y'} = \mu_0 \frac{j S}{2\pi y} \longrightarrow H_z = \frac{I}{2\pi y}$$

Uwaga: jeśli przewodnik jest neutralny ładunkowo, to korzystamy z zasady superpozycji

Równania Poissona i Laplace'a

W przypadku gdy symetria układu utrudnia skorzystanie z postaci całkowej równań Maxwella, zmuszeni jesteśmy korzystać z ich postaci różniczkowej.

Dla przykładu rozważmy rozkład pola elektrycznego generowanego w przestrzeni przez ciągły **statyczny** rozkład ładunku

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r})$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi(\vec{r})$$

Po wstawieniu drugiego równania do pierwszego dostaniemy **równanie Poissona**

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$$

Natomiast w obszarze bez ładunku przestrzennego ($\rho=0$) przechodzi ono w **równanie Laplace'a**

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = 0$$

Są to podstawowe równania, których używamy gdy chcemy znaleźć potencjał, a symetria układu jest zbyt niska lub gdy jest ona **zbyt skomplikowana** aby skorzystać z postaci całkowej równań.

Warunki brzegowe

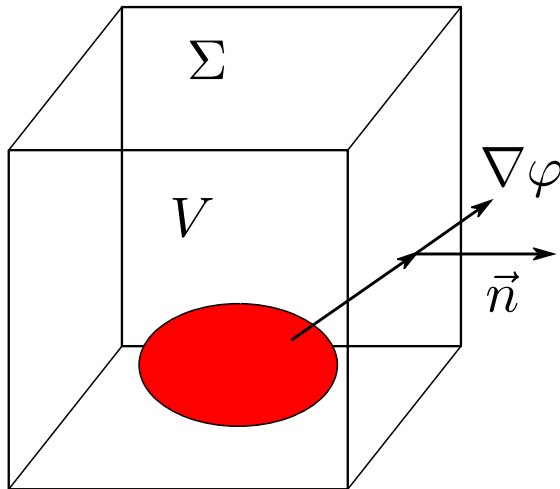
Aby znaleźć rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego 2 rzędu musimy wyspecyfikować warunki brzegowe na powierzchni otaczającej rozważany obszar, mogą one być typu:

- Dirichleta, gdy na brzegu zadajemy warunek na wartość potencjału

$$\varphi(\vec{r})|_{brzeg} = \varphi(\vec{r})|_{\vec{r} \in \Sigma}$$

- von Neumanna, gdy na brzegu zadajemy wartość pochodnej

$$\vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r})|_{brzeg} = -\vec{n} \cdot \nabla \varphi(\vec{r})|_{\vec{r} \in \Sigma}$$



Rozkład potencjału pochodzącego od ciągłego rozkładu ładunków możemy wyznaczyć stosując zasadę superpozycji dla prawa Coulomba

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Czy taki potencjał spełnia równanie Poissona?

Skorzystamy z własności funkcji **delta Diraca**

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} d^3k$$

$$\int \delta(\vec{r}) d^3r = 1$$

Transformata potencjału kulombowskiego w 3 wymiarach

$$F \left\{ \frac{1}{r} \right\} = \frac{4\pi}{k^2}$$

i transformata odwrotna

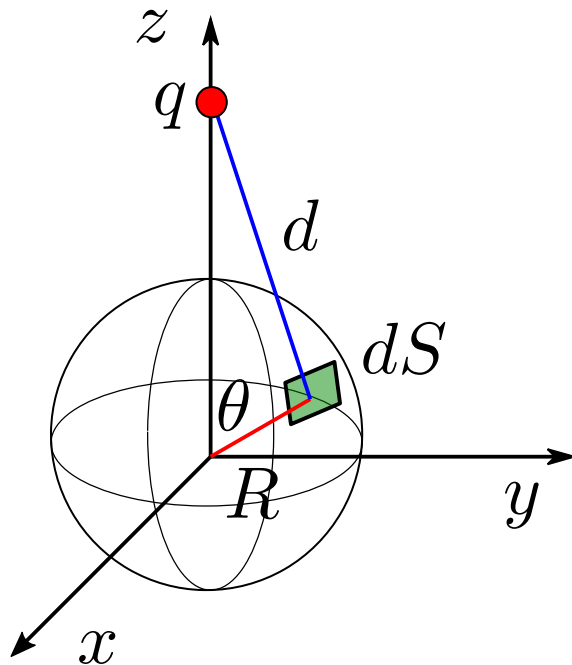
$$F^{-1} \left\{ \frac{4\pi}{k^2} \right\} = \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{4\pi}{k^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k$$

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \varphi &= \nabla_{\vec{r}}^2 \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' && \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{4\pi}{k^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3 k \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_{\vec{r}}^2 \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \int d^3 k \frac{4\pi}{k^2} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \int d^3 k \frac{1}{k^2} \nabla_{\vec{r}}^2 e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \\
 &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \int d^3 k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \\
 &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') && \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} d^3 k \\
 &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \\
 \nabla \varphi(\vec{r}) &= -\frac{1}{\epsilon} \rho(\vec{r})
 \end{aligned}$$

Jednoznaczność rozwiązań równań Poissona i Laplace'a

Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania

- 1) rozwiązanie równania Laplace w pewnej objętości V jest określone jednoznacznie jeżeli spełnia warunek brzegowy na powierzchni zamkniętej otaczającej tę objętość
- 2) wartość potencjału elektrostatycznego w wybranym punkcie r przestrzeni jest średnią potencjału liczoną po sferze o środku w punkcie r i dowolnym promieniu



Ładunek umieszczony w punkcie $[0,0,z]$

Szukamy potencjału w punkcie $[0,0,0]$

Warunek: $R < z$

Potencjał na zaznaczonym wycinku sfery

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d}$$

$$ds = R \sin \theta d\varphi \cdot R d\theta$$

średnia wartość potencjału na sferze

$$\bar{\phi} = \frac{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{d} ds}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{R^2 \sin \theta}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta}}$$

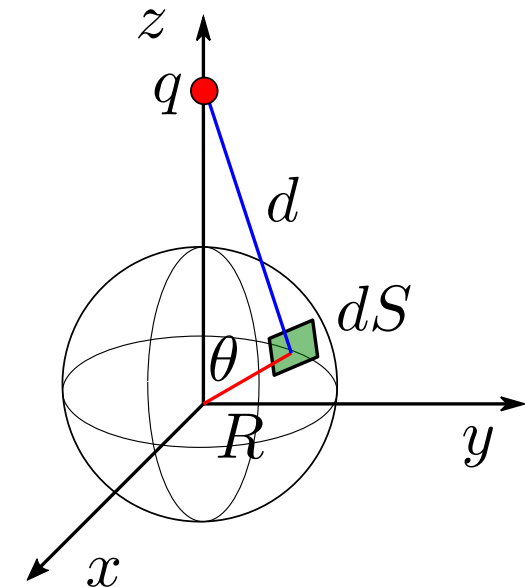
$$\bar{\phi} = -\frac{q}{16\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d \cos \theta \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta}}$$

$$= \frac{q}{8\pi\epsilon} \frac{1}{zR} \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta} \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{q}{8\pi\epsilon} \frac{(z + R) - (z - R)}{zR}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z}$$

- potencjał od ładunku punktowego



Z własności (2) wynika kolejna

- 3) **wewnątrz obszaru pozbawionego ładunku potencjał nie może mieć ekstremum, ekstrema mogą znajdować się jedynie na powierzchni sfery**

Jeśli istniałoby np. minimum w środku, to na sferze potencjał miałby wszędzie wartości większe niż w środku. Potencjał po uśrednieniu po powierzchni sfery miałby większą wartość niż w minimum.

Możemy teraz pokazać, że własność (1) jest prawdziwa.

Założmy że istnieją dwa rozwiązania równania Laplace'a

$$\nabla^2 \phi_1(\vec{r}) = 0 \qquad \nabla^2 \phi_2(\vec{r}) = 0$$

które spełniają warunki brzegowe na powierzchni otaczającej obszar V.

Ze względu na liniowość operatora nabra, suma obu rozwiązań też jest rozwiązaniem

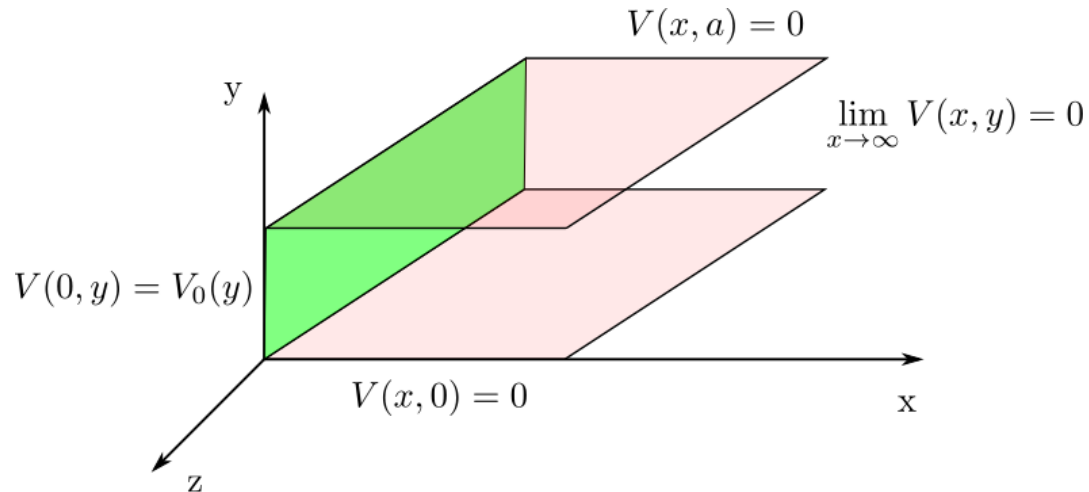
$$\phi = \phi_1 - \phi_2$$

wówczas potencjał musiałby zniknąć na brzegu dając ekstremum w środku [co jest niezgodne z własnością (3)].

Wniosek: oba rozwiązania muszą być identyczne.

Metoda separacji zmiennych

Geometria prostokątna – współrzędne kartezjańskie



warunki brzegowe

$$\begin{cases} V(0, y) = V_0(y) \\ V(x, 0) = 0 \\ V(x, a) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} V(x, y) = 0 \end{cases}$$

W metodzie separacji zmiennych rozwiązanie równania Laplace'a

$$\nabla^2 V = 0$$

proponujemy jako iloczyn rozwiązań dla poszczególnych kierunków

$$V(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

Rozważany układ ma symetrię translacyjną wzdłuż kierunku z (nieskończony) więc

$$V(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

Wstawiamy wersję separowalną do równania Laplace'a

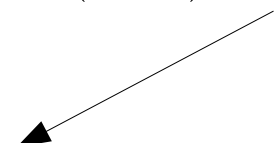
$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \quad / : (XY)$$

$$\underbrace{\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}_C + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}_{-C} = 0 \quad C = \text{const} > 0$$

Znajdźmy rozwiązanie dla $Y(y) \rightarrow$ równanie **oscylatora harmonicznego**

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -CY \quad \rightarrow \quad Y(y) = c_1 \sin(\sqrt{C}y) + c_2 \cos(\sqrt{C}y)$$

Na dolnej i górnej płycie musi być spełniony WB

$$V(x, 0) = V(x, a) = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0$$


druga funkcja spełni WB jeśli

$$\sin(\sqrt{C}a) = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{C}a = k\pi \quad \rightarrow \quad \sqrt{C} = \frac{k\pi}{a}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$Y(y) = c_1 \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \quad c_1 \neq 0$$

Rozwiązanie dla kierunku x

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C \quad \rightarrow \quad X(x) = b_1 e^{\sqrt{C}x} + b_2 e^{-\sqrt{C}x}$$

Składamy oba rozwiązania

$$V(x, y) = \sin(\sqrt{C}y) \cdot [d_1 e^{\sqrt{C}x} + d_2 e^{-\sqrt{C}x}]$$

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= d_1 \\ a_2 b_2 &= d_2 \end{aligned}$$

Musi ono spełniać WB dla x=0

$$V(0, y) = \sin(\sqrt{C}y) \cdot [d_1 + d_2] = V_0(y)$$

oraz w nieskończoności

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x, y) = 0 \quad \rightarrow \quad d_1 = 0, \quad d_2 \neq 0$$

trzeba tylko znaleźć d1 – wykorzystujemy **ortogonalność funkcji harmoniczych**

$$d_1 \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) = V_0(y) \quad / \cdot \int_0^a dy \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)$$

$$\int_0^a dy \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) = \delta_{k,m} \frac{a}{2}$$

$$d_{1,k} = \frac{2}{a} \int_0^a dy V_0(y) \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right)$$

Mamy jedno z rozwiązań → dla wybranego k

$$V_k(x, y) = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) e^{-\frac{k\pi}{a}x} \int_0^a dy V_0(y) \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right)$$

stanowi ono tylko przyczynęk (przybliżenie) do pełnego rozwiązania.
Pełne rozwiązanie wyrazimy jako kombinację liniową rozwiązań szczególnych
(równanie Laplace'a jest liniowe)

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x, y)$$

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{a} \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) e^{-\frac{k\pi}{a}x} \int_0^a dy V_0(y) \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right)$$

Ze względu na eksponencjalną zależność wyniku od zmiennej x -owej, wkłady od dużych k szybko maleją (dla dużych x -ów).

Prawo Biota-Savarta

Założmy że pole EM jest niezależne od czasu, wtedy pole B generowane jest jedynie gęstością prądu

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

podstawmy za H rotację A

$$\mu_0 \vec{H} = \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

i wykorzystajmy relację dla operatorów różniczkowych

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{A}$$

w ten sposób otrzymamy

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} + \nabla (\nabla \cdot \vec{A})$$

Ale do czteropotencjału możemy dodać czterogradient dowolnej funkcji

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

Zatem do potencjału wektorowego dodajemy gradient f

$$\vec{\tilde{A}} = \vec{A} + \nabla f$$

Zażądajmy spełnienia warunku

$$\nabla \cdot \vec{\tilde{A}} = 0$$

co pozwala nam określić równanie definiujące funkcję f

$$0 = \nabla \cdot \vec{\tilde{A}} = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 f$$

które jest równaniem Poissona

$$\nabla^2 f = -\nabla \cdot \vec{A}$$

i posiada rozwiązanie – **postać f zależy od dywergencji A**

Możemy teraz narzucić kolejny warunek na potencjał wektorowy

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{- cechowanie kulombowskie
potencjał wektorowy „beźródłowy”}$$

co kasuje ostatni wyraz w wyrażeniu

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} + \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{A})}_{=0}$$

Przykłady cechowania:

- symetryczne
- niesymetryczne (Landaua)

$$\vec{A} = \frac{B}{2}[-y, x, 0]$$

$$\vec{A} = B[y, 0, 0]$$

$$\vec{A} = B[0, x, 0]$$

Co otrzymaliśmy?

$$\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

otrzymaliśmy układ trzech równań na składowe potencjału wektorowego

$$\nabla^2 A_x = \mu_0 j_x$$

$$\nabla^2 A_y = \mu_0 j_y$$

$$\nabla^2 A_z = \mu_0 j_z$$

Rozwiązanie powyższych równań możemy znaleźć analogicznie jak dla potencjału skalarnego przy założeniu że **potencjał wektorowy znika w nieskończoności**

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}'$$

Pole magnetyczne znajdziemy licząc rotację

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\vec{r}} \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 \vec{r}' \quad - \text{ prawo Biota-Savarta dla gęstości prądu}$$

Jeśli prąd płynie przez cienki przewodnik, możemy wówczas scałkować gęstość prądu po przekroju poprzecznym
(całkę objętościową zamieniamy na całkę wzdłuż krzywej)

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}'$$

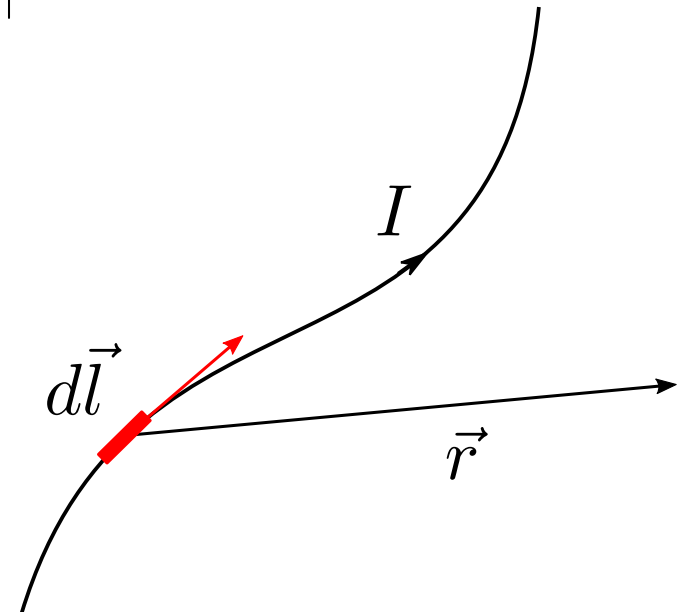
i w nieco uproszczonej postaci ($r=0$)

$$\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{r}' \times d\vec{r}'}{|\vec{r}'|^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{r} \times d\vec{l}}{|\vec{r}|^3}$$

Powyższa całka wyraża **zasadę superpozycji**

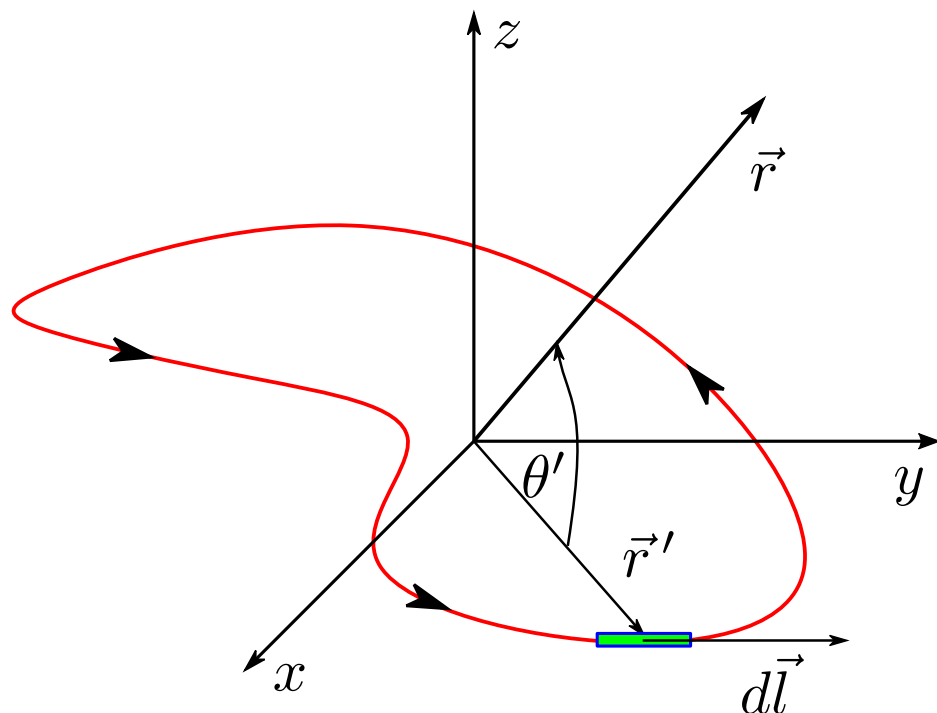
$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} d\vec{l} \times \vec{r}$$



Multipolowe rozwinięcie potencjału wektorowego

Przeanalizujemy w jaki sposób zmienia się potencjał wektorowy zamkniętej pętli z prądem



Z zasady superpozycji mamy

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

elementarny przyczynik do całki możemy zapisać uwzględniając geometrię układu

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

całkowanie (superpozycja) wykonujemy po konturze C (wzdłuż pętli)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{l}'$$

Mianownik wyrażenia podcałkowego możemy zapisać w innej postaci, tj. wykorzystujemy jego podobieństwo do funkcji tworzącej **wielomianów Legendre'a**

$$\text{dla } \frac{r'}{r} < 1$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \theta'}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \theta')$$

Wstawmy rozwinięcie pod całkę

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint_C (r')^n P_n(\cos \theta') d\vec{l}'$$

i zapiszmy kilka pierwszych wyrazów

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \oint_C d\vec{l}'}_{\text{monopol}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \oint_C r' \cos \theta' d\vec{l}'}_{\text{dipol}} + \underbrace{\frac{1}{r^3} \oint_C (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2}\right) d\vec{l}'}_{\text{kwadrupol}} + \dots \right]$$

„Matematyczne metody fizyki”
- A. Lenda

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = \cos \theta$$

$$P_2 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

Wkład od **monopola** znika

$$\oint_C d\vec{l} = 0$$

Wyraz dipolowy

$$\begin{aligned} \vec{A}_{dip}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_C r' \cos \theta' d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_C \frac{r}{r} r' \cos \theta' d\vec{l}' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_C \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_C \hat{r} \cdot \vec{r}' d\vec{l}' \end{aligned}$$

Skorzystajmy z relacji

$$\vec{S} = \int_S d\vec{s} \quad \text{- wektorowe pole powierzchni}$$

$$\oint_C (\vec{c} \cdot \vec{r}) d\vec{l} = \vec{S} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \int_S d\vec{s}$$

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \hat{r} \times \int_S d\vec{s} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}$$

gdzie wektorowa wielkość m jest **magnetycznym momentem dipolowym**

$$\vec{m} = I \int_S d\vec{s} \quad \text{- moment dipolowy pętli z prądem}$$

Pole magnetyczne generowane przez dipol w punkcie \mathbf{r}

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{m}]$$

Uwagi:

- moment dipolowy nie zależy od układu odniesienia (względem, którego punktu liczyć \mathbf{r} ?)
- dla $r' < r$ wyraz dipolowy może dominować, ale musimy uwzględnić też pozostałe wyrazy
- dla $r' \ll r$ pozostałe wyrazy stają się nieistotne i wyraz dipolowy dobrze przybliża **A** i **B**

Przykład. Na metalowej sferze o promieniu R znajduje się ładunek Q .
 Sfera obraca się wokół własnej osi.
 Wyznamy potencjał wektorowy i indukcję pola magnetycznego.

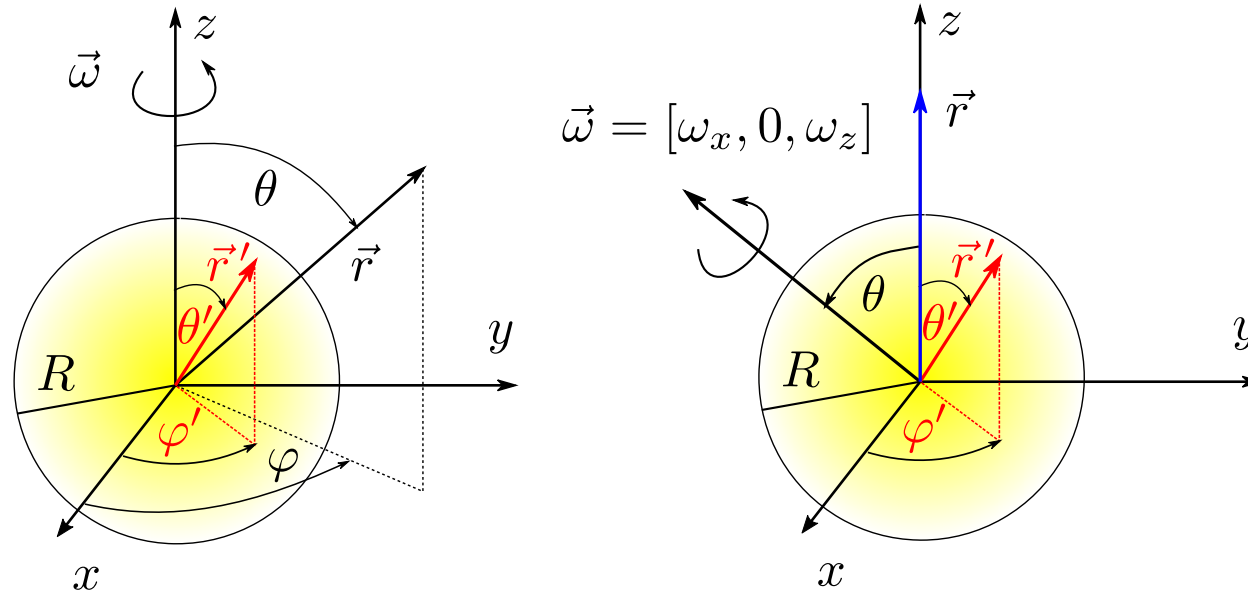
Najpierw znajdziemy potencjał wektorowy

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

wówczas jego rotacja da nam pole B

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

Mamy dwie możliwości ustawienia wirującej sfery

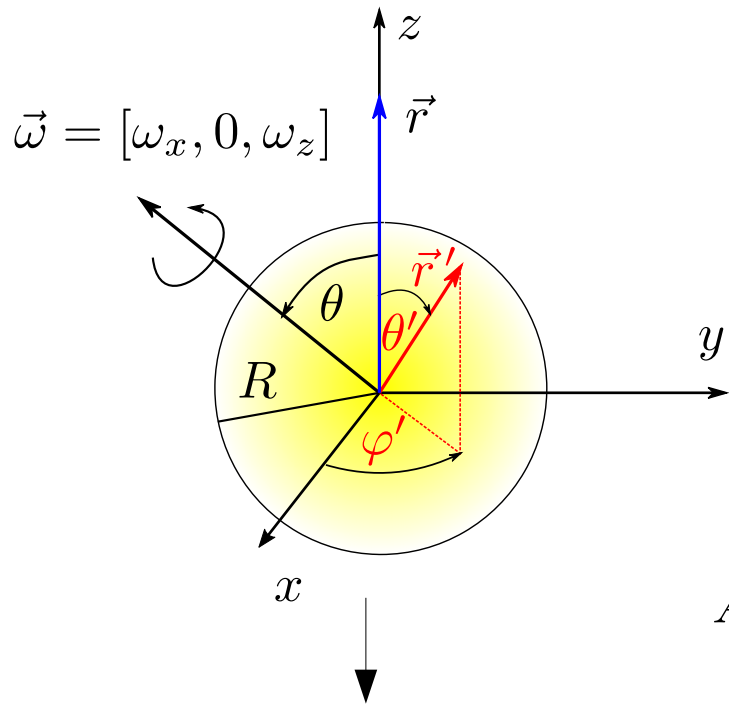


$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (r'^2 + r^2 - 2r'r[\cos(\varphi' - \varphi) \sin(\theta') \sin(\theta) + \cos(\theta') \cos(\theta)])^{\frac{1}{2}}$$

- ale to daje nam zależność od 4 kątów (trudność w całkowaniu)

Wybieramy więc drugą opcję



wektor gęstości prądu

$$\vec{j}(\vec{r}') = \rho \vec{v}'$$

$$\vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\rho = \sigma \delta(r - R)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}' \delta(r' - R)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty dr' \frac{\sigma \vec{\omega} \times \vec{r}' \delta(r' - R) r'^2 \sin(\theta')}{(r'^2 + r^2 - 2r' r \cos(\theta'))^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma R^3 \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\vec{\omega} \times \hat{e}_r \sin(\theta')}{(R^2 + r^2 - 2R r \cos(\theta'))^{\frac{1}{2}}}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (r'^2 + r^2 - 2r' r \cos(\theta'))^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma R^3 \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\vec{\omega} \times \hat{e}_r \sin(\theta')}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta'))^{\frac{1}{2}}}$$

wyrażmy wektory w ukł. kartezjańskim

$$\vec{\omega} = [\omega_x, 0, \omega_z]$$

$$\hat{e}_r = [\sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta']$$

$$\vec{\omega} \times \hat{e}_r = -\cos \theta' \omega_x \hat{e}_y$$

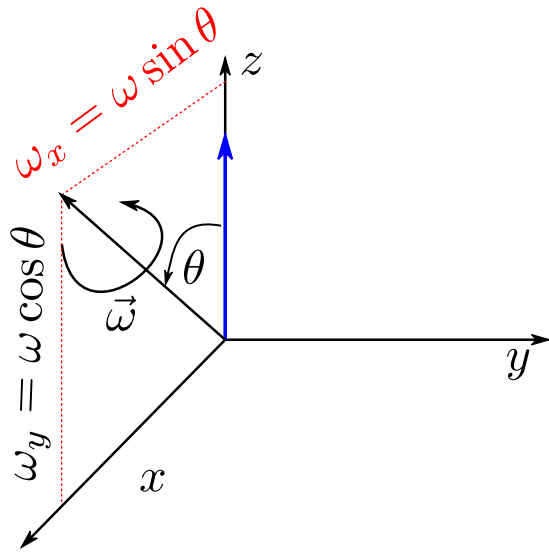
$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{2} \sigma R^3 \omega_x \int_0^\pi d\theta' \frac{-\sin \theta' \cos \theta'}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta'))^{\frac{1}{2}}} \hat{e}_y$$

$$A_y(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 \sigma R^3 \omega_x}{2} \left[\frac{(R^2 - rR + r^2) \cdot |R + r|}{3r^2 R^2} - \frac{(R^2 + rR + r^2) \cdot |R - r|}{3r^2 R^2} \right]$$

Rozważamy 2 możliwości

$$1) r > R \text{ (na zewnątrz sfery)} \quad A_y(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 R^4 \sigma \omega_x}{3} \frac{1}{r^2}$$

$$2) r < R \text{ (wewnątrz sfery)} \quad A_y(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 R \sigma \omega_x}{3} r$$



$$\vec{\omega} = [\omega_x, 0, \omega_z]$$

$$\vec{r} = [0, 0, r]$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = r \underbrace{\omega \sin \theta}_{\omega_x} (-\hat{e}_y)$$

$$\hat{e}_y = \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{\omega_x r}$$

zapiszmy jeszcze raz oba rozwiązania

$$1) r > R \text{ (na zewnątrz sfery)} \quad \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3} \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$2) r < R \text{ (wewnątrz sfery)} \quad \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 R \sigma}{3} \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- uzyskaliśmy wynik który jest słuszny dla dowolnego ułożenia wektorów: ω i r

Przywracamy „pierwotną” oś obrotu

$$\vec{\omega} = [0, 0, \omega]$$

$$\vec{r} = [x, y, z]$$

dla $r < R$ dostajemy zależność

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{2\mu_0 R \sigma}{3} \omega \hat{e}_z$$

- pole B wewnątrz sfery jest jednorodne

Jakie są A i B na zewnątrz?

Zapiszmy potencjał wektorowy w zmienionej postaci

$$\vec{A}(r > R) = \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\frac{4\pi R^4 \sigma}{3} \vec{\omega} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}$$

Uzyskaliśmy wyrażenie opisujące
magnetyczny moment dipolowy
naładowanej i obracającej się sfery

$$\vec{m} = \frac{4\pi R^4 \sigma}{3} \vec{\omega}$$

to jest wyraz opisujący moment dipolowy
który pojawia się w rozwinięciu multipolowym
potencjału wektorowego

Dla sfery obracającej się wokół osi „z” dostajemy zależności

$$\vec{r} = [r, \theta, \varphi]$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{e}_\varphi \quad - \text{zależność od kierunku „}\varphi\text{” oraz od odległości } r$$

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta) \quad - \text{brak zależności od kąta obrotu } \varphi$$

Magnetostaticzne warunki brzegowe

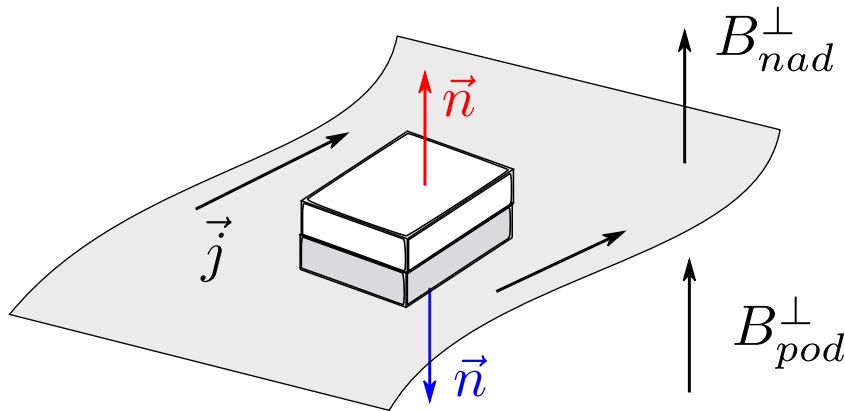
Postać różniczkową równania Maxwella

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

przeprowadźmy do postaci całkowej

$$\int \nabla \cdot \vec{B} dv = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

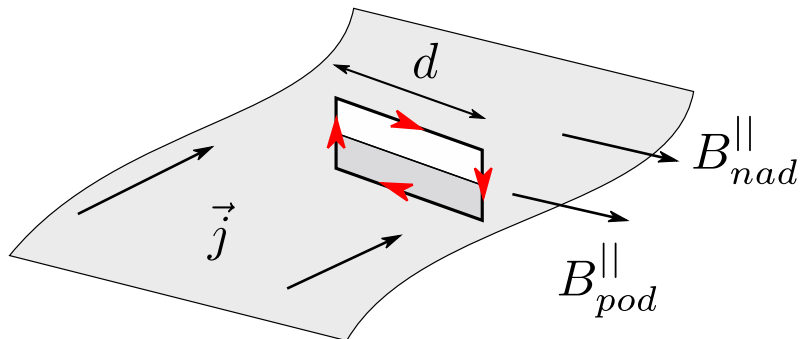
Przeanalizujmy ten wynik dla następującego przypadku



$$\left(\vec{B}_{nad} \cdot \vec{n} + \vec{B}_{pod} \cdot \vec{n} \right) ds = 0$$

$$B_{nad}^{\perp} - B_{pod}^{\perp} = 0$$

$$B_{nad}^{\perp} = B_{pod}^{\perp} \quad \text{- składowa prostopadła jest ciągła}$$



Prawo Ampere'a

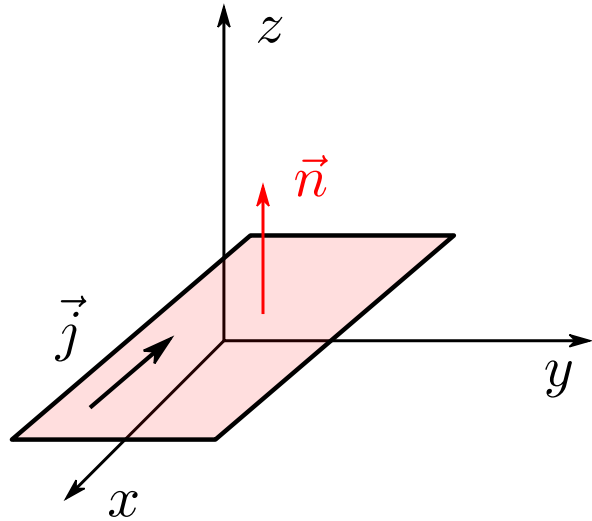
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B_{nad}^{\parallel} - B_{pod}^{\parallel})d = \mu_0 I_C = \mu_0 j_{1D} d$$

$$j = j_{1D} \delta(z - z_0)$$

$$B_{nad}^{\parallel} - B_{pod}^{\parallel} = \mu_0 j_{1D} \quad \text{- skok w składowej stycznej do powierzchni}$$

ale prostopadłej do gęstości prądu

Dla składowej stycznej równoległej do prądu dostaniemy 0
 - więc styczna równoległa do gęstości prądu jest ciągła (zero)



Zbierzmy posiadane informacje

$$B_{nad}^x = B_{pod}^x = 0$$

$$\vec{j} = [-j, 0, 0]$$

$$B_{nad}^y - B_{pod}^y = \mu_0 j_{1D}$$

$$\vec{j} \times \vec{n} = j \hat{e}_y$$

$$B_{nad}^z - B_{pod}^z = 0$$

Powyższe równania możemy zapisać w zwartej postaci

$$\vec{B}_{nad} - \vec{B}_{pod} = \mu_0 \vec{j}_{1D} \times \vec{n}$$

Potencjał wektorowy na powierzchni musi być ciągły

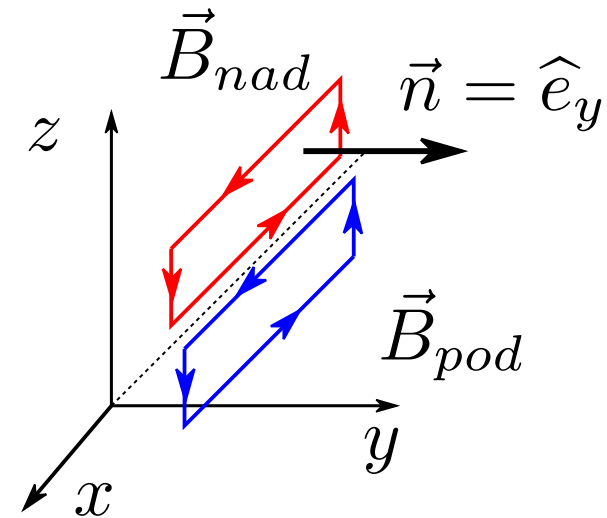
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} < \infty \quad \rightarrow \quad \vec{A}_{nad} = \vec{A}_{pod}$$

cechowanie kulombowskie

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

+ twierdzenie Stokes'a

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$



$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$$

poruszając się po konturze w kierunku „x” A_x nie ulega zmianie

kontur czerwony (nad płytą)

$$-A_x(x, y, z) \cdot l + A_x(x, y, z + \Delta z) \cdot l = \vec{B}_{nad} \cdot \hat{e}_y l \Delta z$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A_x(x, y, z + \Delta z) - A_x(x, y, z)}{\Delta z} = \left. \frac{\partial A_x}{\partial z} \right|_{nad} = \vec{B}_{nad} \cdot \hat{e}_y$$

kontur niebieski (pod płytą)

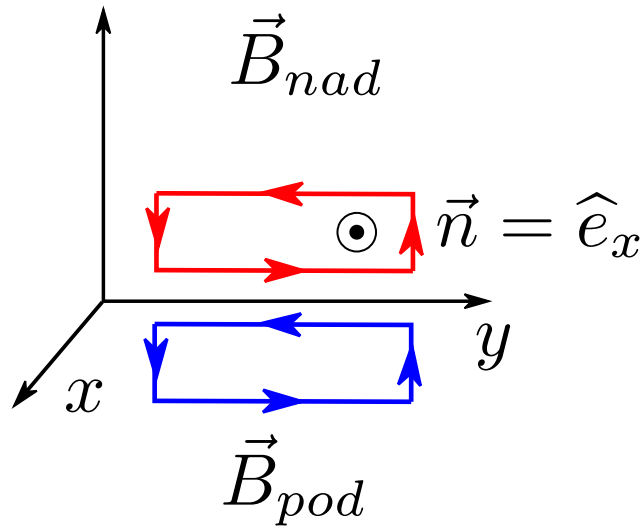
$$A_x(x, y, z) \cdot l - A_x(x, y, z - \Delta z) \cdot l = \vec{B}_{pod} \cdot \hat{e}_y l \Delta z$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A_x(x, y, z) - A_x(x, y, z - \Delta z)}{\Delta z} = \left. \frac{\partial A_x}{\partial z} \right|_{pod} = \vec{B}_{pod} \cdot \hat{e}_y$$

całkowanie po konturze w kierunku 'x'

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} \Big|_{nad} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \Big|_{pod} = \left(\vec{B}_{nad} - \vec{B}_{pod} \right) \cdot \hat{e}_y = \mu_0 (\vec{j} \times \hat{e}_z) \cdot \hat{e}_y = \mu_0 j$$

całkowanie po konturze w kierunku 'y'



$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0$$

poruszając się po konturze w kierunku „y” A_y nie ulega zmianie

kontur czerwony (nad płytą)

$$A_y(x, y, z) \cdot l - A_y(x, y, z + \Delta z) \cdot l = \vec{B}_{nad} \cdot \hat{e}_x l \Delta z = 0$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A_y(x, y, z + \Delta z) - A_y(x, y, z)}{\Delta z} = \frac{\partial A_y}{\partial z} \Big|_{nad} = 0$$

kontur niebieski (pod płytą)

$$-A_y(x, y, z) \cdot l + A_y(x, y, z - \Delta z) \cdot l = \vec{B}_{pod} \cdot \hat{e}_x l \Delta z = 0$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-(A_y(x, y, z) - A_y(x, y, z - \Delta z))}{\Delta z} = -\frac{\partial A_y}{\partial z} \Big|_{pod} = 0$$

$$\vec{B}_{nad} \cdot \hat{e}_x = \vec{B}_{pod} \cdot \hat{e}_x = 0 \quad \text{- bo prąd płynie w kierunku 'x' i nie wytwarza składowej } B_x$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} \Big|_{nad} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \Big|_{pod} = 0$$

Trzeciego przypadku nie musimy rozpatrywać (kontur leżący w płaszczyźnie x-y)
bo dla cechowania kulombowskiego mamy zależność

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

Zbierzmy informacje o pochodnej w kierunku normalnym do płyty przez którą przepływa prąd

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} \Big|_{nad} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \Big|_{pod} = \left(\vec{B}_{nad} - \vec{B}_{pod} \right) \cdot \hat{e}_y = \mu_0 j = -\mu_0 (\vec{j} \cdot \hat{e}_x)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} \Big|_{nad} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \Big|_{pod} = 0$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} \Big|_{nad} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \Big|_{pod} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{A}_{nad}}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial \vec{A}_{pod}}{\partial \vec{n}} = -\mu_0 \vec{j}$$

- na powierzchni przewodnika potencjał A jest ciągły,
ale występuje tam skok pochodnej w kierunku
prostopadłym (równy gęstości prądu)