W8. Elektrodynamika: **równania Maxwella w postaci różniczkowej**
relatywistyczna postać równań Maxwella

Plan wykładu:

- pierwsza para równań Maxwella
- zasada zachowania ładunku
- czterowektor gęstości prądu
- działanie dla swobodnego pola EM
- druga para równań Maxwella
- jawnie relatywistyczny zapis równań Maxwella

Pierwsza para równań Maxwella

Znamy związek potencjałów EM z E i B

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

Działamy na nie operatorem nabla

$$\nabla\times\vec{E} = -\nabla\times\nabla\varphi - \nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{A} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = \nabla\cdot\nabla\times\vec{A} = 0$$

Otrzymujemy pierwszą parę równań Maxwella

$$\nabla\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

Czterowektor gęstości prądu

Dotychczas zajmowaliśmy się opisem pojedynczej cząstki.
Bardziej ogólny opis otrzymamy jeśli rozważymy ciągły rozkład ładunku opisywany w przestrzeni funkcją gęstości

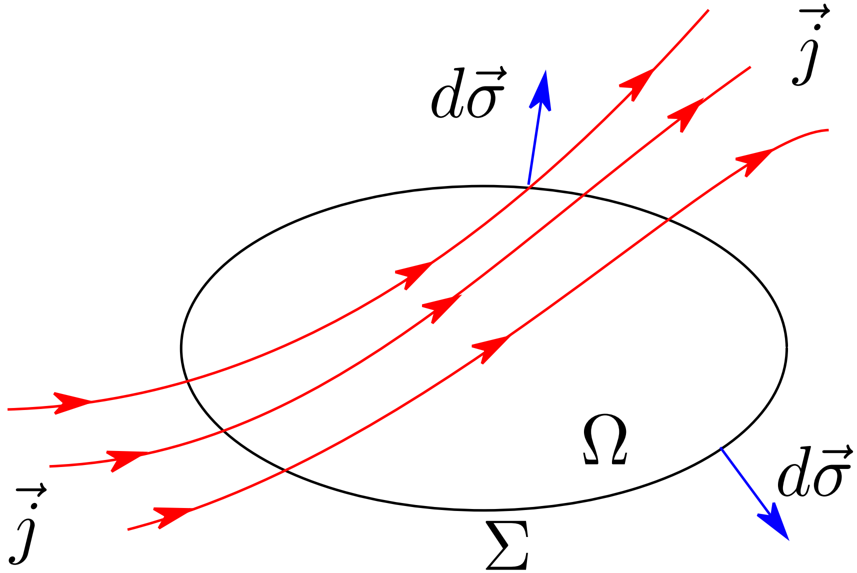
$$\rho(\vec{r})$$

oraz gęstością prądu

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$$

Posługując się gęstością ładunku i prądu musimy uwzględnić **zasadę zachowania ładunku**, co zapewnia **równanie ciągłości**

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\oint_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{\sigma}$$



znak ‘minus’ - jeśli ładunek wypływa na zewnątrz to jego ilość w Ω maleje

Do prawej strony równania ciągłości

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\, dV = -\oint\limits_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{\sigma}$$

zastosujmy tw. Gaussa

$$\int\limits_V \nabla\cdot\vec{W}\, dV = \oint\limits_\Sigma \vec{W}(\vec{r})\cdot d\vec{\sigma}$$

podstawiając

$$\vec{W}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r})$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\, dV = -\oint\limits_\Sigma \vec{j}\cdot d\vec{\sigma} = -\int\limits_V \nabla\cdot\vec{j}\, dV$$

$$\int\limits_V \left(\frac{d}{dt}\rho + \nabla\cdot\vec{j}\right) dV = 0$$

Otrzymaliśmy **równanie ciągłości w postaci różniczkowej**

$$\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Równanie ciągłości zapiszemy w jawnie relatywistycznej postaci
(gęstość ładunku i gęstość prądu stanowią składowe tego samego czterowektora)

Ładunek zgromadzony w objętości dV

$$dq = \rho\, dV$$

przemnóżmy przez elementarne przesunięcie w czasoprzestrzeni

$$dq\, dx^\mu = \rho\, dV\, dx^\mu = \rho\, \underbrace{dV\, dt}_{d\Omega} \frac{dx^\mu}{dt} = j^\mu d\Omega$$

Element czasoprzestrzeni

$$d\Omega = dV\, dt = dx\, dy\, dz\, dt$$

dzięki kontrakcji długości i dylatacji czasu jest skalarem (niezależny od j^μ)

$$dx' = \frac{dx}{\gamma}, \quad dt' = \gamma dt \qquad \Rightarrow \qquad d\Omega' = d\Omega$$

Otrzymaliśmy **czterowektor gęstości prądu**

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} = \left(\rho\, c,\, \vec{j}\,\right)$$

- 0-wa składowa to gęstość ładunku (skalowana c)
- trzy pozostałe składowe to nierelatywistyczna gęstość prądu

Różniczkowa postać klasycznego równania ciągłości narzuca warunek na czterowektor gęstości prądu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = \partial_\mu j^\mu = 0$$

Równania ruchu cząstki naładowanej w zewnętrznym polu EM otrzymaliśmy dodając do całki działania poprawkę

$$S_A = -\frac{q}{c} \int\limits_{Z_1}^{Z_2} A_\mu dx^\mu$$

W S_A ładunek q zastąpmy gęstością ładunku

$$q = \int\limits_V \rho \, dV$$

$$\begin{aligned} S_A &= -\frac{1}{c} \int\limits_V \rho \, dV \int\limits_{Z_1}^{Z_2} A_\mu dx^\mu = -\frac{1}{c} \int\limits_V \rho \, dV \int\limits_{t_1}^{t_2} A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} dt = -\frac{1}{c} \int\limits_\Omega A_\mu \rho \frac{dx^\mu}{dt} dV \, dt \\ &= -\frac{1}{c} \int\limits_\Omega A_\mu j^\mu d\Omega \end{aligned}$$

Działanie S_A opisuje oddziaływanie gęstości ładunku i gęstości prądu (jako czterowektor j^μ) z zewnętrznym polem EM (czterowektor A_μ)

$$\mathrm{S}_A = -\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} A_\mu j^\mu d\Omega$$

Pole EM wywołane zadanym rozkładem ładunków i prądów

Dotychczas pole EM, w którym porusza się cząstka, traktowaliśmy jako zewnętrzne.

Odwróćmy zagadnienie i przeanalizujmy sytuację odwrotną
- cząstka (rozkład ładunku/prądu) będzie źródłem pola.
To pomoże nam opisać układy cząstek, a pola nie będziemy traktować jako zewnętrznego.

Działanie swobodnego pola EM

Działanie dla pola EM zewnętrznego już znamy.
Utworzymy teraz całkę działania pola swobodnego (generowanego gęstością ładunku i prądu)

Jak skonstruować takie działanie?

- powinno być ono niezmiennikiem tr. Lorentza czyli kwadratowym w funkcji wektorów pola (takie niezmienniki znamy)

- czteropotencjał pola jest nieprzydatny ze względu na jego niejednoznaczność

- możemy wykorzystać tensor pola EM

Wymagane własności ma całka działania zapisana w postaci

$$S_f = -\frac{\varepsilon_0}{4}\int F_{\mu\,\nu}F^{\mu\,\nu}d\Omega$$

ε$_0$ – przenikalność dielektryczna próżni

Całka działania pole zewnętrzne + swobodne

$$\begin{aligned} S &= S_A + S_f = -\frac{1}{c}\int A_\mu j^\mu d\Omega - \frac{\varepsilon_0}{4}\int F_{\mu\,\nu}F^{\mu\,\nu}d\Omega \\ &= -\frac{1}{c}\int\left(A_\mu j^\mu + \frac{c\varepsilon_0}{4}F_{\mu\,\nu}F^{\mu\,\nu}\right)d\Omega \end{aligned}$$

Zażądajmy znikania **wariacji całki działania**

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left(j^\mu\delta A_\mu + \frac{c\varepsilon_0}{4}\delta\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\right)d\Omega = -\frac{1}{c}\int\left(j^\mu\delta A_\mu + \frac{c\varepsilon_0}{2}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}\right)d\Omega$$

Korzystamy z definicji tensora pola EM

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

$$\delta F_{\mu\nu} = \delta\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right) = \frac{\partial \delta A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x^\nu}$$

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left(j^\mu \delta A_\mu + \frac{c\varepsilon_0}{2}F^{\mu\nu}\left(\frac{\partial \delta A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x^\nu}\right)\right) d\Omega$$

Tensor pola EM jest antysymetryczny, możemy więc pozbyć się jednego wyrazu

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left(j^\mu \delta A_\mu - c\varepsilon_0 F^{\mu\nu}\frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x^\nu}\right) d\Omega$$

Wykorzystamy teraz tw. Gaussa w czterowymiarowej przestrzeni

$$\int\limits_\Omega \partial_\nu W^\nu d\Omega = \oint\limits_{\partial\Omega} W^\nu d\sigma_\nu$$

czterodywergencja

$$\partial_\nu W^\nu$$

Przyjmując

$$W^{\nu} = F^{\mu\nu}\delta A_{\mu}$$

otrzymamy

$$\int_{\Omega} \partial_{\nu}\left(F^{\mu\nu}\delta A_{\mu}\right) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} F^{\mu\nu}\delta A_{\mu} d\sigma_{\nu} = 0$$

całka powierzchniowa (brzeg) znika ze względu na ustalone warunki brzegowe
- wariacja na brzegu znika

$$\int_{\Omega} \partial_{\nu}\left(F^{\mu\nu}\delta A_{\mu}\right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(F^{\mu\nu}\partial_{\nu}\delta A_{\mu} + \delta A_{\mu}\partial_{\nu}F^{\mu\nu}\right) d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} F^{\mu\nu}\partial_{\nu}\delta A_{\mu} d\Omega = -\int_{\Omega} \delta A_{\mu}\partial_{\nu}F^{\mu\nu} d\Omega = +\int_{\Omega} \delta A_{\mu}\partial_{\nu}F^{\nu\mu} d\Omega$$

Ostatnie wyrażenie wykorzystujemy w całce działania

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int \left(j^{\mu} - c\varepsilon_0\partial_{\nu}F^{\nu\mu}\right)\delta A_{\mu} d\Omega$$

Dla warunku znikania wariacji całki działania

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int \left(j^{\mu} - c\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} F^{\nu\mu} \right) \delta A_{\mu} d\Omega = 0$$

dostajemy

$$j^{\mu} - c\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} F^{\nu\mu} = 0$$

czyli **równanie ciągłości w wersji relatywistycznej**

$$\boxed{\frac{1}{c\varepsilon_0} j^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} F^{\nu\mu}}$$

(cztery równania pola w zapisie tensorowym)

$$
\begin{aligned}
\left(F^{\mu\nu}\right) &= \left(g^{\mu\nu}\right)\left(F_{\mu\nu}\right)\left(g^{\mu\nu}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 0} = \frac{1}{c\varepsilon_0} j^0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 1} = \frac{1}{c\varepsilon_0} j^1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + c\frac{\partial B_z}{\partial y} - c\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c\varepsilon_0} j^x
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 2} = \frac{1}{c\varepsilon_0} j^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} - c\frac{\partial B_z}{\partial x} + c\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c\varepsilon_0} j^y
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 3} = \frac{1}{c\varepsilon_0} j^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + c\frac{\partial B_y}{\partial x} - c\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{c\varepsilon_0} j^z
$$

Ostatni wynik zapiszmy w zwartej postaci

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

$$-\varepsilon_0 \dot{\vec{E}} + c^2 \varepsilon_0 \nabla \times \vec{B} = \vec{j}$$

lub wykorzystując związki

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \qquad \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} \qquad \mu_0 \vec{H} = \vec{B}$$

otrzymaliśmy kolejne dwa równania Maxwella

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{H} = \dot{\vec{D}} + \vec{j}$$

Komplet równań Maxwella w postaci różniczkowej

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{H} = \dot{\vec{D}} + \vec{j}$$

oraz **równanie ciągłości (zasada zachowania ładunku)**

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Relatywistyczny zapis równań Maxwella

Ostatnie dwa równania Maxwella otrzymaliśmy w postaci relatywistycznej

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{1}{c\varepsilon_0} j^\mu$$

W podobny sposób zapiszmy dwa pierwsze równania:

$$\partial_\nu G^{\nu\mu} = 0$$

G – tensor dualny do F

$$(G^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & cB_x & cB_y & cB_z \\ -cB_x & 0 & -E_z & E_y \\ -cB_y & E_z & 0 & -E_x \\ -cB_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

z F i G możemy utworzyć niezmienniki tensorowe:

$$\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2c} G^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Policzmy pochodne kowariantne tensora G

$$\partial_\nu G^{\nu\mu} = 0$$

$$\frac{\partial G^{\mu 0}}{\partial x^\mu} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial G^{\mu 1}}{\partial x^\mu} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial G^{\mu 2}}{\partial x^\mu} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial G^{\mu 3}}{\partial x^\mu} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

co daje $\dot{\vec{B}} = -\nabla \times \vec{E}$

oraz dodatkowe **równanie ciągłości** $\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$

$$(G^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & cB_x & cB_y & cB_z \\ -cB_x & 0 & -E_z & E_y \\ -cB_y & E_z & 0 & -E_x \\ -cB_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x^\mu) = (ct,\, x,\, y,\, z)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \\ &+ \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \\ &+ \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \end{aligned}$$