**W7. Elektrodynamika cz. I**

Plan wykładu:

- cząstka w zewnętrznym polu elektrycznym i magnetycznym
  - czteropotencjał pola elektromagnetycznego
- interpretacja czteropotencjału
- niezmienniczość cechowania czteropotencjałów elektromagnetycznych
- transformacja Lorentza pól: magnetycznego i elektrycznego

Elektrodynamika sformułowana w postaci równań Maxwella powstała pół wieku przez teorią relatywistyczną.

Związek obu teorii jest na tyle silny, że równania te można wyprowadzić
korzystając z zasady najmniejszego działania i teorii relatywistycznej.

W dalszej części wykładu wykorzystamy zapis tensorowy,
jednak do zapisu operacji sumowania użyjemy **konwencji sumowania Einsteina**

$$a_\mu b^\mu = \sum_\mu a_\mu b^\mu = s$$

$$a_\mu T^{\mu\nu} = \sum_\mu a_\mu T^{\mu\nu} = V^\nu$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \sum_\mu \partial_\mu T^{\mu\nu} = \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} = V^\nu$$

## Cząstka w zewnętrznym polu elektrycznym i magnetycznym

Rozważmy problem cząstki relatywistycznej w polu elektromagnetycznym (EM).

Wiemy, że działanie dla cząstki swobodnej ma postać

$$S_0 = -m_0 c \int_{Z_1}^{Z_2} ds$$

musimy dodać do niego wyraz opisujący oddziaływanie z polem EM.

Załóżmy że pole EM możemy opisać przy pomocy czterowektora w postaci

- tensora kontrawariantnego $A^{\mu} = (\varphi, c\vec{A})$

Uwaga: stała c ujednolica wymiar współrzędnych tensora

- tensora kowariantnego $A_{\mu} = (\varphi, -c\vec{A})$

Tensor A definiuje tzw. **czteropotencjał pola EM**, gdzie:

wielkości definiowane w elektrodynamice klasycznej

- $\varphi$ - potencjał skalarny
- $\vec{A}$ - potencjał wektorowy

$$\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$$

$$\vec{A} = [A_x(\vec{r}, t),\ A_y(\vec{r}, t),\ A_z(\vec{r}, t)]$$

Zakładamy tu że potencjał skalarny zawiera informacje o polu elektrycznym, a wektorowy o polu magnetycznym – wielkości te zdefinujemy później

Działanie opisujące oddziaływanie cząstka-pole powinno być liniowe względem pola (np. siła od pola elektrycznego działającego na ładunek q)

Taką własność posiada skalar $$ds_A = C \cdot A_\mu dx^\mu, \qquad C = -\frac{q}{c} = const$$

stałą C dobieramy tak aby działanie miało wymiar energia x czas, a równania ruchu opisywały ruch rzeczywisty

Poprawka do działania związana z potencjałem EM

$$S_A = -\frac{q}{c}\int_{Z_1}^{Z_2} A_\mu dx^\mu$$

i pełne działanie

$$\begin{aligned} S &= S_0 + S_A = -m_0 c \int\limits_{Z_1}^{Z_2} ds - \frac{q}{c}\int\limits_{Z_1}^{Z_2} A_\mu dx^\mu \\ &= \int_{Z_1}^{Z_2} \left(-m_0 c\, ds - q\,\varphi\, dt + q\vec{A}\cdot d\vec{r}\right) \end{aligned}$$

zamieniamy na całkę po czasie

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(-m_0 c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\,\varphi + q\,\vec{A}\cdot\vec{v}\right) dt$$

Z całki działania wydobywamy funkcję Lagrange'a

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\varphi + q\vec{A}\cdot\vec{v}$$

a z lagranżjanu pęd uogólniony układu

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\vec{A} = \vec{p} + q\vec{A}$$

uwaga: różniczkowanie po wektorze traktujemy jako różniczkowanie po wszystkich składowych wektora

$\vec{p}$ - pęd mechaniczny cząstki

$\vec{P}$ - pseudopęd: pęd cząstki + pole

Energia cząstki w polu EM

$$\begin{aligned} E &= \vec{P}\cdot\vec{v} - L = \vec{p}\cdot\vec{v} + q\vec{A}\cdot\vec{v} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\varphi - q\vec{A}\cdot\vec{v} \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\varphi = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi \end{aligned}$$

Energia cząstki nie zależy od potencjału wektorowego $\vec{A}$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi$$

korzystając z relacji  prędkość-pęd (cząstki)

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{V}$$

prędkość (cząstki) wyrażamy przez pęd

$$\vec{v}^{\,2} = \frac{\vec{p}^{\,2} c^2}{m_0^2 c^2 + \vec{p}^{\,2}}$$

by otrzymać funkcję Hamiltona

$$\begin{aligned} H &= c\sqrt{m_0^2 c^2 + \vec{p}^{\,2}} + q\varphi \\ &= c\sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\vec{P} - q\vec{A}\right)^2} + q\varphi \end{aligned}$$

Interpretacja czteropotencjału pola EM

Zapiszmy równania ruchu cząstki

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

$$\dot{\vec{P}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{p} + q\vec{A}\right) = -q\nabla\varphi + q\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{v}\right)$$

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{v}\right) = \underbrace{(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{v}}_{=0} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{v}\times\nabla\times\vec{A} + \underbrace{\vec{A}\times\nabla\times\vec{v}}_{=0}$$

- wyrazy 1 i 4 znikają bo prędkość nie zależy od położenia

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p} + q\vec{A}\right) = -q\nabla\varphi + q\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{A} + q\vec{v}\times\nabla\times\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{A}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\vec{A} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p} + q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + q(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} = -q\nabla\varphi + q(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} + q\vec{v}\times\nabla\times\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = -q\nabla\varphi - q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + q\vec{v}\times\nabla\times\vec{A}$$

Otrzymaliśmy wyrażenie na pochodną czasową pędu cząstki

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = -q\nabla\varphi - q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + q\vec{v}\times\nabla\times\vec{A}$$

Jeśli wyrażenie to zapiszemy w znanej nam postaci opisującej siłę działającą na naładowaną cząstkę w polu E i B (siła Lorenza)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

to z porównania wyrazów dostaniemy zależności

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

Związki te znane są z elektrodynamiki klasycznej

Zinterpretowaliśmy znaczenie fizyczne składników czteropotencjału pola EM.

## Niezmienniczość cechowania potencjałów elektromagnetycznych

Czteropotencjał pola EM nie jest jednoznacznie określony.

Zobaczmy co się stanie gdy odejmiemy od niego ‘’czterogradient‘’ dowolnej funkcji f określonej w czasoprzestrzeni

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = A_\mu + \Delta A_\mu$$

spowoduje to zmianę w całce działania

$$\Delta S = -\frac{q}{c}\int_{Z_1}^{Z_2} \Delta A_\mu dx^\mu$$

$$\Delta S = \frac{q}{c}\int\limits_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu = \frac{q}{c}\int\limits_{Z_1}^{Z_2} df = \frac{q}{c}\left[f(Z_2) - f(Z_1)\right]$$

Dzięki narzuceniu warunków brzegowych wartość ΔS wyznaczają tylko wartości f w punktach początkowym i końcowym trajektorii.

ΔS nie zależy od trajektorii, a więc wariacja f nie wnosi wkładu do wariacji całki działania.

Sprawdźmy jak zmienią się równania ruchu po uwzględnieniu poprawki

Policzmy „czterogradient”

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \partial_\mu f = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \nabla f\right) \qquad \tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = A_\mu + \Delta A_\mu$$

i dodajmy go do składowych czteropotencjału

$$A_\mu = (\varphi, -c\vec{A}) \Rightarrow \left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, -c\vec{A} - \nabla f\right) \Longrightarrow \begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \\ \tilde{\vec{A}} &= \vec{A} + \frac{1}{c}\nabla f \end{aligned}$$

$$\tilde{\vec{E}} = -\nabla\tilde{\varphi} - \frac{\partial \tilde{\vec{A}}}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla f = -\nabla f - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

$$\tilde{\vec{B}} = \nabla \times \tilde{\vec{A}} = \nabla \times \vec{A} - \frac{1}{c}\nabla \times \nabla f = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

Niejednoznaczność wyboru potencjałów nazywana jest niezmienniczością cechowania,

własność tę wykorzystuje się w celu ułatwienia wykonywanych rachunków
(odpowiedni wybór cechowania)

**Przykład**. Jeśli potencjał skalarny nie zależy od czasu, możemy zażądać jego zerowania

$$\tilde{\varphi} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} = c\varphi \quad \longrightarrow \quad f = ct\varphi$$

dodajemy poprawkę do potencjału wektorowego

$$\tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \frac{1}{c}\nabla c\, t\, \varphi = \vec{A} + t\nabla\varphi$$

co daje

$$\tilde{\vec{E}} = -\frac{\partial \tilde{\vec{A}}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla(t\varphi) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = \vec{E}$$

$$\tilde{\vec{B}} = \nabla \times \tilde{\vec{A}} = \nabla \times \vec{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla t\varphi}_{=0} = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

## Transformacja Lorentza pól elektrycznego i magnetycznego

Wiemy już jaki jest związek E i B z czteropotencjałem pola EM.
Moglibyśmy wykonać transformację Lorentza czteropotencjału
i określić w ten sposób transformacje pól E i B

- rachunek taki byłby dość żmudny.

Ułatwimy sobie zadanie, jeśli wykorzystamy **tensor pola elektromagnetycznego**

$$\boxed{f_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}}$$

tensor jest antysymetryczny

$$\boxed{f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}}$$

więc ma tylko 6 niezależnych składowych.

Tworzymy go korzystając z dwóch czterowektorów

$$x^\mu = (ct,\, x,\, y,\, z)$$

$$A_\mu = (\varphi, -c\vec{A})$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$f_{00} = f_{11} = f_{22} = f_{33} = 0$$

$$f_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x$$

$$f_{02} = \frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2} = -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = E_y$$

$$f_{03} = \frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3} = -\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = E_z$$

$$A_\mu = (\varphi,\, -cA_x,\, -cA_y,\, -cA_z)$$
$$x^\mu = (ct,\, x,\, y,\, z)$$

$$f_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = -c\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = -c(\nabla \times \vec{A})_z = -cB_z$$

$$f_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} = -c\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) = c(\nabla \times \vec{A})_y = cB_y$$

$$f_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = -c\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = -c(\nabla \times \vec{A})_x = -cB_x$$

Postać tensora pola EM

$$f_{\mu\nu} = \left( \begin{array}{cccc} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{array} \right)$$

transformację Lorentza tensora pola EM

$$f'_{\mu\nu} = \sum_{\mu_1\nu_1} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu}} f_{\mu_1\nu_1}$$

możemy wykonać korzystając z zapisu macierzowego

$$f'_{\mu\nu} = (\tilde{C}_{\mu}{}^{\mu_1})(f_{\mu_1\nu_1})(\tilde{C}_{\nu}{}^{\nu_1})^T$$

$$f'_{\mu\nu} = \left( \begin{array}{cccc} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cccc} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{cccc} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$f'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & \gamma(E_y - \beta c B_z) & \gamma(E_z + \beta c B_y) \\ -E_x & 0 & -\gamma(cB_z - \beta E_y) & \gamma(cB_y + \beta E_z) \\ -\gamma(E_y - \beta c B_z) & \gamma(cB_z - \beta E_y) & 0 & -cB_x \\ -\gamma(E_z + \beta c B_y) & -\gamma(cB_y + \beta E_z) & cB_x & 0 \end{pmatrix}$$

porównujemy ze składowymi tensora w układzie O'

$$f'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E'_x & E'_y & E'_z \\ -E'_x & 0 & -cB'_z & cB'_y \\ -E'_y & cB'_z & 0 & -cB'_x \\ -E'_z & -cB'_y & cB'_x & 0 \end{pmatrix}$$

z porównania dostaniemy

$$E'_x = E_x$$

$$E'_y = \gamma(E_y - \beta c B_z)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + \beta c B_y)$$

$$B'_x = B_x$$

jeśli $B_x$=0 to się nie wygeneruje $B'_x$

$$B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_z\right)$$

nawet dla $B_y$=0, $B'_y$ różne od 0

$$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}E_y\right)$$

nawet dla $B_z$=0, $B'_z$ różne od 0

Transformacja miesza ze sobą współrzędne wektorów E i B.

Wynik nie jest zaskakujący jeśli rozważymy ruch ładunku punktowego w układzie własnym i w innym inercjalnym poruszającym się względem niego z prędkością v.

## Czteroprędkość

Prędkość cząstki transformuje się w skomplikowany sposób przy zmianie układu odniesienia.

Dlaczego?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

bo różniczkujemy 3 składowe czterowektora $x^{\mu}$ po jego 4 składowej

Wyrażenie uprości się gdy zamiast dt użyjemy dτ – czasu własnego.

Tak definiujemy **czterowektor prędkości**

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \left( c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \right)$$

$$u^{\mu} = \gamma \left( c, \vec{v} \right)$$

Trójprędkość v nie jest przestrzenną składową czterowekotra u - bo mnożona jest przez czynnik $\gamma$

(dopiero w granicy $\gamma$~1 tak się dzieje)

## Siła w mechanice relatywistycznej

W mechanice klasycznej siłę definiujemy jako pochodną pędu

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Siła działająca na cząstkę zmienia jej energię

$$E^2 = m_0^2 c^2 + c^2 \vec{p}^{\,2} \qquad / \cdot \frac{d}{dt}$$

$$E \frac{dE}{dt} = \vec{p} c^2 \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p} c^2 \cdot \vec{F} \qquad / : E$$

ponieważ

$$\frac{\vec{p} c^2}{E} = \vec{v} \quad \longleftarrow \quad \left( \vec{p} = \gamma m_0 \vec{V} = \gamma m_0 c^2 \frac{\vec{V}}{c^2} = \frac{E}{c^2} \vec{V} \right)$$

dostajemy zależność

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}} \qquad dE = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{x} = dT$$

Przez analogię do czterowektora prędkości użyjmy formuły

$$\boxed{K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}} \qquad d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

która definiuje czterowektor siły **Minkowskiego**

## Czterowektor siły

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

$$K^\mu = \gamma \left( \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \gamma \left( \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{F}, \vec{F} \right)$$

## Związek czterowektora siły z tensorem pola EM

Klasyczną siłę Lorentza opisuje formuła

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

po przemnożeniu jej przez $\gamma$ dostaniemy składowe 1-3 $K^\mu$

Ale mamy do dyspozycji czterowektor prędkości

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma\vec{v})$$

względem którego $K^\mu$ jest liniowe.

Liniową zależność K od czterowektora prędkości oraz wektorów pola zapewnia użycie tensora pola EM

$$K^\mu = q f^{\mu\nu} g_{\nu\nu_1} u^{\nu_1} = q f^\mu{}_\nu u^\nu$$

$f^\mu{}_\nu$ - tensor Faradaya