W6. Mechanika relatywistyczna cz. III

Plan wykładu:

- geometria czasoprzestrzeni
- elementy rachunku tensorowego
- tensory kontrawariantne i kowariantne
- tensor metryczny
- tensorowe własności operatorów różniczkowych

Rozpatrywana dotychczas transformacja Lorentza
opisuje przejście pomiędzy układami O i O',

$$c\,dt' = \gamma(c\,dt - \beta\,dx)$$
$$dx' = \gamma(dx - \beta\,c\,dt)$$
$$dy' = dy$$
$$dz' = dz$$

które poruszają się względem siebie wzłuż osi x.

Ta szczególna transformacja Lorentza jest obrotem wokół osi prostopadłej do osi x i t.

Aby uzyskać związki transformacyjne dla układów O i O' dowolnie usytuowanych względem siebie musielibyśmy dokonać złożenia trzech obrotów:

- obrótu w przestrzeni trójwymiarowej
- szczególnej transformacji Lorentza
- kolejnego obrotu w przestrzeni trójwymiarowej (powrót do poprzedniego ułożenia osi)

Taki sposób wyznaczania związków transformacyjnych powodowałby duże trudności rachunkowe.

Możemy postąpić inaczej: nowe współrzędne wyraźmy w postaci kombinacji liniowej starych współrzędnych

$$x'^{\nu} = \sum_{\mu=0}^{3} C^{\nu}_{\mu} x^{\mu} \qquad \nu = 0, 1, 2, 3$$

Współczynniki rozwinięcia możemy zapisać w postaci pochodnych współrzędnych w O' i w O

$$x'^1 = x'^1(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$x'^1 = C_0^1 x^0 + C_1^1 x^1 + C_2^1 x^2 + C_3^1 x^3$$

$$\frac{\partial x'^1}{\partial x^0} = C_0^1$$

$$C_\mu^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}$$

Transformację możemy zapisać w postaci

$$x'^\nu = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} x^\mu$$

Oznaczenia: $\nu,\ \mu = 0, 1, 2, 3$ - składowe czterowektora

$i,\ j = 1, 2, 3$ - składowe wektora w 3D

Zgodnie z założeniem, czterowektor czasu i położenia definiujemy następująco

$$(x^{\mu}) = (ct,\, x,\, y,\, z)$$

a wszystkie współczynniki szczególnej transformacji Lorentza
można zapisać w postaci macierzy

$$(C^{\nu}_{\mu}) = \left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Z transformacją współrzędnych przy zmianie układu odniesienia
ściśle związane są własności obiektów zwanych tensorami.

Są one niezwykle użyteczne, gdy wykonujemy obliczenia w mechanice relatywistycznej
(ale nie tylko np. w dynamice bryły sztywnej wykorzystujemy tensor momentu bezwładności).

Tensorem 0 rzędu lub skalarem nazywamy obiekt geometryczny opisywany jedną liczbą,
który jest niezmienniczy względem transformacji współrzędnych.

zgodnie z tą definicją:

- skalarami nie są: masa relatywistyczna, energia, składowe pędu
- skalarami są: masa spoczynkowa, czas własny, przedział czasoprzestrzenny

Tensorem kontrawariantnym (1 rzędu) w n-wymiarowej przestrzeni jest obiekt geometryczny opisywany przy pomocy n liczb, transformujący się zgodnie z transformacją współrzędnych.

- tensor kontrawariantny czasu i położenia

$$(x^\mu) = (ct,\, x,\, y,\, z)$$

- tensor kontrawariantny energii i pędu

$$(p^\mu) = \left(\frac{E}{c},\, p_x,\, p_y,\, p_z\right)$$

związek transformacyjny dla składowej pędu

$$p^{'\nu} = \sum_{\mu=0}^{3} C^{\nu}_{\mu} p^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial x^{'\nu}}{\partial x^\mu} p^\mu$$

Uwagi:

- jeśli dla trzech składowych wektora w 3D, dopasujemy zerową składową, to problem transformacji wektora przy zmianie układu odniesienia mamy rozwiązany

- powyższe postępowanie nie zawsze jest możliwe,
  przykład: transformacja pola elektrycznego z układu, w którym ładunek spoczywa (tylko E – 3 składowe) do układu w którym się on porusza (wytwarza E i B – 6 składowych)

$$E^{'}_z = \gamma\ (E_z - \beta\, c\, B_y)$$ - o tym się jeszcze przekonamy

Aby opisać transformację współrzędnych E i B konieczne jest użycie tensora wyższego rzędu.

Tensorem kontrawariantym 2 rzędu nazywamy obiekt geometryczny opisywany przy pomocy n^2 liczb, którego składowe transformują się zgodnie z transformacją współrzędnych.

$$T'^{\mu\nu} = \sum_{\mu_1=0}^{3} \sum_{\nu_1=0}^{3} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\nu_1}} T^{\mu_1 \nu_1}$$

Tensor 2 rzędu ma 16 składowych.

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}$$

Liczbę niezależnych składowych można ograniczyć narzucając warunek symetrii lub antysymetrii.

Symetria tensora nie zmienia się po wykonaniu transformacji do nowego układu odniesienia (jest zachowana)

Tensor symetryczny

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$$

ma

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2} = 10$$

niezależnych składowych.

Tensor antysymetryczny

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$$

ma

$$\frac{n^2 - n}{2} = 6$$

niezależnych składowych.

Tensory kowariantne

Z wielkości wektorowych możemy utworzyć wielkości skalarne

np. przedział czasoprzestrzenny tworzymy korzystając z czterowektora czasu i położenia.

Wielkości te możemy definiować posługując się oprócz tensorów kontrawariantnych, także tensorami kowariantnymi.

Tensor kowariantny (1 lub 2 rzędu) to obiekt, którego składowe transformują się zgodnie z transformacją odwrotną (jak dla przejścia z układu O' do O)

$$
\begin{aligned}
c\,dt &= \gamma(c\,dt' + \beta\,dx') \\
dx &= \gamma(dx' + \beta\,c\,dt') \\
dy &= dy' \\
dz &= dz'
\end{aligned}
$$

Macierz transformacji odwrotnej

$$
\left(\tilde{C}^{\mu}_{\nu}\right) = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta & 0 & 0 \\ +\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Uwaga: dla odróżnienia tensorów kontra- i kowariantnych, w tensorach kowariantnych wskaźniki umieszczamy na dole

$$(x^\mu) \text{ - tensor kontrawariantny}$$

$$(x_\mu) \text{ - tensor kowariantny}$$

Transformacja tensora kowariantnego 1 rzędu

$$p_\nu^{'} = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} p_\mu$$

Transformacja tensora kowariantnego 2 rzędu

$$T_{\mu\nu}^{'} = \sum_{\mu_1=0}^{3} \sum_{\nu_1=0}^{3} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^\nu} T_{\mu_1 \nu_1}$$

Przy użyciu obu typów tensorów możemy zapisywać wielkości fizyczne.

Utwórzmy wielkość skalarną

$$\begin{aligned}\sum_{\mu} q^{'\mu} p^{'}_{\mu} &= \sum_{\mu}\sum_{\nu}\sum_{\nu_1} \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^{\nu}} q^{\nu} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{'\mu}} p_{\nu_1} \\ &= \sum_{\nu,\nu_1}\left(\sum_{\mu} \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{'\mu}}\right) q^{\nu} p_{\nu_1}\end{aligned}$$

$$\sum_{\mu} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{'\mu}} \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\nu_1}_{\nu} = \begin{cases} 1 \iff \nu = \nu_1 \\ 0 \iff \nu \neq \nu_1 \end{cases}$$

Zdefiniowana przez nas wielkość

$$\sum_{\mu} q^{'\mu} p^{'}_{\mu} = \sum_{\nu,\nu_1} \delta^{\nu_1}_{\nu} q^{\nu} p_{\nu_1} = \sum_{\mu} q^{\mu} p_{\mu}$$

jest zachowana przy zmianie układu odniesienia, więc jest skalarem.

Tensor metryczny

Obliczmy kwadrat odległości dwóch punktów w czasoprzestrzeni

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Co się stanie jeśli zmienimy układ odniesienia?
Wykonajmy transformację ds^2

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \sum_{\mu,\nu} \sum_{\mu_1,\nu_1} g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu_1}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu_1}} dx'^{\mu_1} dx'^{\nu_1} \\ &= ds'^2 = \sum_{\mu_1,\nu_1} g'_{\mu_1\nu_1} dx'^{\mu_1} dx'^{\nu_1} \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy regułę transformacyjną dla $g_{\mu\nu}$ (zgodnie z tranformacją odwrotną)

$$g'_{\mu_1\nu_1} = \sum_{\mu.\nu} g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu_1}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu_1}}$$

$g_{\mu\nu}$ - jest kowariantnym tensorem metrycznym (określa metrykę przestrzeni)

W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej odległość (między punktami) definiujemy jako

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

więc tensor metryczny ma postać

$$g^E_{\mu\nu} = \delta_{\mu\,\nu}$$

ale w czasoprzestrzeni odległość (między zdarzeniami) definiujemy nieco inaczej

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

co zmienia postać tensora metrycznego

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Własności tensora metrycznego
Jak transformuje się tensor metryczny przy zmianie układu odniesienia?

$$g^{'}_{\mu\nu} = \sum_{\mu_1,\nu_1} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu}} g_{\mu_1 \nu_1}$$

$$g'_{\mu\nu} = \sum_{\mu_1,\nu_1} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu}} g_{\mu_1\nu_1}$$

Sumowanie wykonamy korzystając z zapisu macierzowego

$$\begin{aligned}
\left(g'_{\mu\nu}\right) &= \left(\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu}}\right)^T g_{\mu_1\nu_1} \left(\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu}}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 & \gamma^2\beta^2 - \gamma^2\beta^2 & 0 & 0 \\ \gamma^2\beta^2 - \gamma^2\beta^2 & \gamma^2\beta^2 - \gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(g_{\mu\nu}\right)
\end{aligned}$$

1) składowe tensora metrycznego nie ulegają
zmianie przy przejściu do innego układu inercjalnego

2) Tensor metryczny pozwala zamienić tensor kontrawariantny na kowariantny

$$p_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} p^\nu$$

Przykład

$$(dx^\nu) = (cdt, dx, dy, dz)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cdt \\ -dx \\ -dy \\ -dz \end{pmatrix}$$

$$(dx_\nu) = (cdt,\ -dx,\ -dy,\ -dz)$$

Z tym przykładem już się spotkaliśmy przy liczeniu odległości

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu = \sum_\mu dx^\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} dx^\nu = \sum_\mu dx^\mu dx_\mu$$

ten wyraz definiuje metrykę czasoprzestrzeni

ten wyraz wprowadziliśmy gdy definiowaliśmy skalar

Przykład. kontra- i kowariantny czterowektor energii-pędu

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$$

$$p_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} p^\nu$$

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c},\ -p_x,\ -p_y,\ -p_z \right)$$

Uwaga: możemy zdefiniować również kontrawariantny tensor metryczny

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = c^2 dt^2 - (-dx)^2 - (-dy)^2 - (-dz)^2$$

ale ma on takie same składowe co jego kowariantny odpowiednik (własność 3)

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$

- jest to ogólna własność płaskiej czasoprzestrzeni
- w przypadku zakrzywionej czasoprzestrzeni (ogólna teoria względności) oba tensory mają różne składowe

Ponieważ przy pomocy tensora metrycznego możemy zamieniać

- tensor kowariantny → tensor kontrawariantny (podnosimy wskaźnik)
- tensor kontrawariantny → tensor konwarianty (obniżamy wskaźnik)

wobec czego możemy podobne operacje wykonać na tensorach wyższych rzędów

tj. podnieść/obniżyć np. jeden ze wskaźników

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \sum_{\nu'} g_{\nu\nu'} T^{\mu\nu'}$$

otrzymamy wówczas tensor mieszany

Tensorowe własności operatorów różniczkowych

Operatory różniczkowania po zmiennych przestrzennych podlegają określonym regułom transformacyjnym przy zmianie układu odniesienia - zatem posiadają własności tensorowe

np. operator różniczkowania po kontrawariantnej zmiennej przestrzennej

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

jest kowariantnym tensorem pierwszego rzędu,

często oznaczanym jako $$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu}$$

Operator różniczkowania po składowych tensora kowariantnego

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial^\mu$$

ma własności tensora kontrawariantnego.

Możemy także utworzyć operator różniczkowy drugiego rzędu
różniczkując po składowych tensorów: kontra- i kowariantnego

$$\sum_\mu \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

który jest niezmienniczy względem transformacji Lorentza

co nam przypomina jego postać?

jaki ma związek z pierwszym postulatem Einsteina?