W5. mechanika relatywistyczna cz. II

Plan wykładu

- relatywistyczna całka działania
- funkcja Lagrange'a
- pęd i energia cząstki swobodnej
- zasada zachowania energii
- funkcja Hamiltona
- czterowektory, transformacja energii i pędu

Relatywistyczna całka działania

Naszym celem będzie teraz znalezienie równań ruchu w mechanice relatywistycznej.
W tym celu skorzystamy z zasady najmniejszego działania i formalizmu Lagrange'a.

Działanie dla cząstki swobodnej

Założenie: działanie nie powinno zależeć od wyboru układu odniesienia.

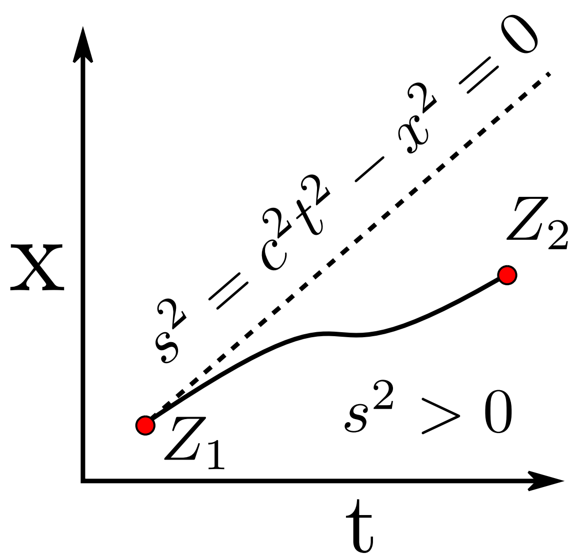
Wielkość, która posiada tę własność – przedział czasoprzestrzenny.

Przyjmujemy nieskończenie mały przedział czasoprzestrzenny jako elementarne działanie.

$$dS = A \cdot ds$$

Całkujemy ds po linii świata (zbiorze kolejnych zdarzeń)
od zdarzenia Z_1 do Z_2

$$S = A \int_{Z_1}^{Z_2} \sqrt{c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$



Uwaga:

wartość i znak stałej A dobierzemy później, tak aby działanie opisywało ruch rzeczywisty a funkcja podcałkowa była funkcją Lagrange'a (bo chcemy znaleźć równania ruchu)

Całkowanie wykonajmy po zmiennej t

$$\begin{aligned} S &= A\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{c^2\frac{dt^2}{dt^2}-\frac{dx^2}{dt^2}-\frac{dy^2}{dt^2}-\frac{dz^2}{dt^2}}\,dt \\ &= A\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{c^2-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2} \\ &= A\cdot c\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}\,dt \end{aligned}$$

a wynik porównajmy z

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt$$

skąd otrzymamy funkcję Lagrange'a (z dokładnością do stałej - którą musimy określić)

$$L=A\cdot c\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}$$

Jak wyznaczyć stałą A?

W granicy małych prędkości relatywistyczna funkcja Lagrange'a powinna przechodzić w jej postać klasyczną.

Zakładamy więc

$$\frac{v}{c} << 1$$

i rozwijamy L w szereg

$$f = \sqrt{1-a^2} = 1 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8}a^4 + O\left(a^6\right)$$

$$L = A \cdot c\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = A \cdot c + \frac{-A \cdot v^2}{2c}$$

Porównajmy je z wyrażeniem klasycznym (cząstka swobodna)

$$L = \frac{m_0 v^2}{2}$$

(pomijamy wyraz Ac jako zupełną pochodną czasową funkcji g=Act)

$$A = -m_0 c$$

m_0 – masa spoczynkowa ciała
m – będzie masą relatywistyczną (zdefiniujemy ją później)

Po wyznaczeniu stałej A możemy zapisać działanie

$$S = -m_0 c \int_{Z_1}^{Z_2} ds$$

i kompletną funkcję Lagrange'a dla relatywistycznej cząstki swobodnej

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Pęd cząstki swobodnej

Mając do dyspozycji funkcję Lagrange'a, możemy znaleźć pęd cząstki

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

którego składowe we wsp. kartezjańskich przyjmują postać

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = -m_0 c^2 \frac{-\frac{v_i}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \gamma\, v_i$$

$$\vec{p} = \gamma\, m_0\, \vec{v}$$

Energia cząstki swobodnej

Korzystamy z transformacji Legendre'a (jak dla funkcji Hamiltona – ale zostawimy prędkości)

$$E = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

$$\begin{aligned} E &= \vec{p}\cdot\vec{v} - L \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 - m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

$$E = \gamma m_0 c^2$$

W granicy małych prędkości $$\frac{v}{c} << 1$$

otrzymujemy klasyczne wyrażenie na energię cząstki swobodnej

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2}$$

do której dodana jest tzw. energia spoczynkowa cząstki

$$E_0 = m_0 c^2$$

Korzystając z wyrażenia na pęd cząstki, możemy zdefiniować masę relatywistyczną

$$m(v) = \gamma\, m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dzięki niej pęd i energia przyjmują postać

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$E = mc^2$$

Relatywistyczna zasada zachowania energii

Odkryliśmy, iż energia spoczynkowa wnosi wkład do jej energii całkowitej.
Powoduje to określone konsekwencje
- należy gruntownie przedefiniować zasadę zachowania energii.

Załóżmy, że układ składa się z N oddziałujących cząstek. Układ jest izolowany.

Określmy całkowitą energię układu.

- suma energii spoczynkowych

$$\varepsilon_0 = \sum_{n=1}^{N} m_{0,n} c^2$$

- suma energii kinetycznych

$$T = \sum_{n=1}^{N} T_n$$

- suma energii oddziaływań między cząstkami

$$U = \sum_{i>j}^{N} U_{i,j}$$

Energia całkowita

w zależności od sumy energii kinetycznych i energii oddziaływań cząstek może być

a) większa od całkowitej energii spoczynkowej

b) mniejsza od całkowitej energii spoczynkowej

W pierwszym przypadku (a) układ nie jest stabilny i może się rozpaść wydzialając energię równą różnicy energii całkowitej oraz sumy mas spoczynkowych cząstek.

W drugim przypadku (b) cząstki tworzą stabilny układ związany, a podczas jego formowania się (syntezy) wydziela się energia.

Relatywistyczna funkcja Hamiltona

Otrzymaliśmy już wzór na energię całkowitą.

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}$$

Podstawmy w nim pędy w miejsce prędkości.

$$\vec{p}^{\,2} = \frac{m_0^2 \vec{v}^{\,2}}{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

$$\frac{\vec{p}^{\,2}}{m_0^2 c^2}(c^2 - \vec{v}^{\,2}) = \vec{v}^{\,2}$$

$$\vec{v}^{\,2}\left(1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m_0^2 c^2}\right) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{m_0^2}$$

$$\vec{v}^{\,2} = \frac{\frac{\vec{p}^{\,2}}{m_0^2}}{1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m_0^2 c^2}} = \frac{\vec{p}^{\,2} c^2}{m_0^2 c^2 + \vec{p}^{\,2}}$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{p}^{\,2}}{m_0^2 c^2 + \vec{p}^{\,2}}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{m_0^2 c^2 + \vec{p}^{\,2}}}} = c\sqrt{m_0^2 c^2 + \vec{p}^{\,2}}$$

Relatywistyczna funkcja Hamiltona cząstki swobodnej ma postać

$$H = c\sqrt{m_0^2 c^2 + \vec{p}^{\,2}}$$

Transformacja energii i pędu, czterowektory

Energia i pęd wyrażają się odpowiednio poprzez pędy i prędkości, które podlegają transformacjom przy zmianie układu odniesienia.

Transformacje E i p wydobędziemy wykorzystując transformacje Lorenzta

$$t' = \gamma\left(t - \beta\frac{x}{c}\right) \qquad \beta = \frac{V}{c}$$
$$x' = \gamma\,(x - \beta\, c\, t)$$

(V – prędkość O’ względem O)

Zauważmy że przy zmianie układu odniesienia składowe x i t mieszają się ze sobą (obrót)
– zatem stanowią składowe tego samego czterowektora

$$(ct, x, y, z)$$

(ujednolicamy wymiar składowych mnożąc t przez c)

Załóżmy, że cząstka porusza się w układzie O z prędkością v.

Skorzystajmy z wyniku dot. dylatacji czasu

$$dt = \gamma d\tau$$

(t - czas w O, τ - czas własny ciała)

i użyjmy tej relacji w definicji prędkości w O

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{\gamma d\tau}$$

Prędkość wstawiamy do wzoru na pęd

$$\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v} = m_0 \gamma \frac{d\vec{r}}{\gamma d\tau} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau}$$

I jeszcze modyfikacja wzoru na energię

$$E = m_0 \gamma c^2 = m_0 c^2 \frac{dt}{d\tau}$$

Uwaga: czas własny i masa spoczynkowa są jednoznacznie określone
– nie zależą od wyboru układu odniesienia.
Powyższy wzór jest słuszny w każdym układzie inercjalnym.

Wykorzystajmy teraz tr. Lorentza

$$c\,dt' = \gamma(c\,dt - \beta\,dx)$$

$$dx' = \gamma(dx - \beta\,c\,dt)$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$E' = m_0 c^2 \frac{dt'}{d\tau} = m_0 c^2 \gamma \left(\frac{dt}{d\tau} - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{d\tau} \right) = m_0 c^2 \gamma \left(\frac{E}{m_0 c^2} - \frac{\beta}{c} \frac{p_x}{m_0} \right) = \gamma \left(E - \beta\, c\, p_x \right)$$

$$c\,dt' = \gamma(c\,dt - \beta\,dx)$$
$$dx' = \gamma(dx - \beta\,c\,dt)$$
$$dy' = dy$$
$$dz' = dz$$
$$p_x = m_0 \frac{dx}{d\tau}$$

$$p_x^{'} = m_0 \frac{dx'}{d\tau} = m_0 \gamma \left(\frac{dx}{d\tau} - \beta\, c\, \frac{dt}{d\tau} \right) = \gamma \left(p_x - \frac{\beta}{c} E \right)$$

Otrzymaliśmy związki transformacyjne na p i E

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta\, p_x \right)$$
$$p_x^{'} = \gamma \left(p_x - \frac{\beta}{c} E \right)$$
$$p_y^{'} = p_y$$
$$p_z^{'} = p_z$$

Wniosek: przy zmianie układu odniesienia energia i pęd mieszają się jak współrzędne położenia i czas stanowią zatem składniki tego samego czterowektora

$$\left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$$