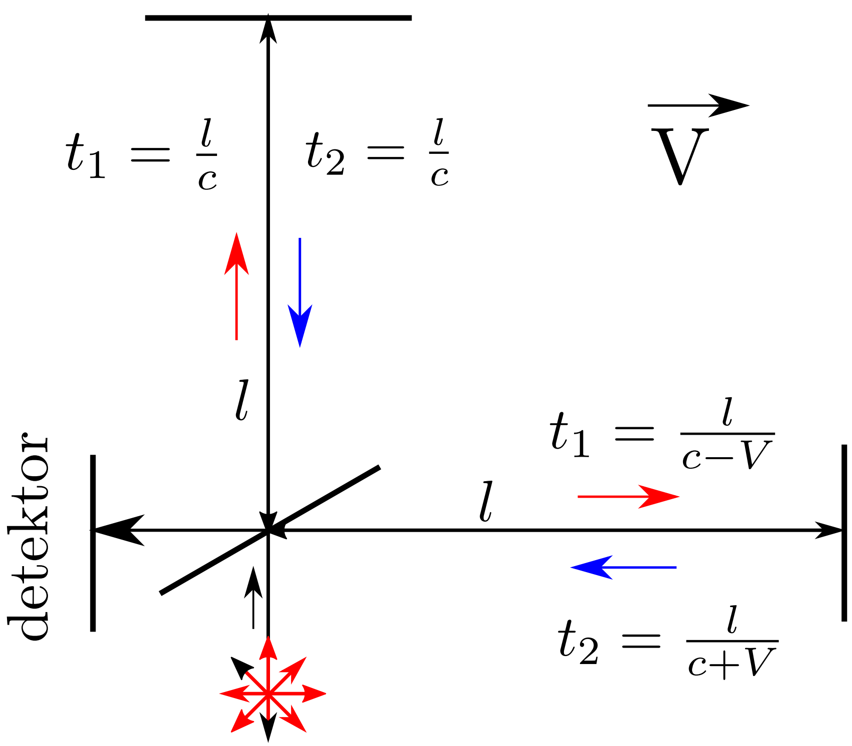
W4. Mechanika relatywistyczna cz. I

Plan wykładu

- doświadczenie Michelsona-Morleya
- zasada względności Einsteina, mechanika relatywistyczna
- przedział czasoprzestrzenny
- transformacja Lorentza
- kontrakcja długości, dylatacja czasu, transformacja prędkości

Doświadczenie Michelsona-Morleya (1881) - prędkość światła nie zależy od układu odniesienia



$$V = 3 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \qquad c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Zgodnie z transformacją Galileusza, czas poruszania się światła po odcinku poziomym (V i c są równoległe)

$$\Delta t = t_1 + t_2 = \frac{l}{c-V} + \frac{l}{c+V} = \frac{2cl}{c^2 - V^2}$$

a wzdłuż odcinka pionowego (V i c są prostopadłe)

$$\Delta t = \frac{2l}{c}$$

okazało się jednak, że oba czasy są identyczne

wniosek:
transformacja Galileusza nie jest prawdziwa gdy rozważania dotyczą układów poruszających się względem siebie ze „znacznymi" prędkościami

Wynik eksperymentu wskazywał iż prędkość światła jest stała, niezależnie od układu odniesienia co jest sprzeczne z założeniami transformacji Galileusza (klasyczne prawo dodawania prędkości).

W mechanice klasycznej zakłada się, że oddziaływania rozchodzą się w przestrzeni z nieskończoną prędkością (to wymusza bezwzględność czasu w różnych układach).

W rzeczywistości prędkość ich rozchodzenia się jest ograniczona skończoną prędkością światła (w próżni).

Mechanika relatywistyczna

Teorię uwzględniającą nowe fakty eksperymentalne ogłosił w 1905 roku Einstein.
Nosi ona nazwę mechaniki relatywistycznej i bazuje na dwóch postulatach:

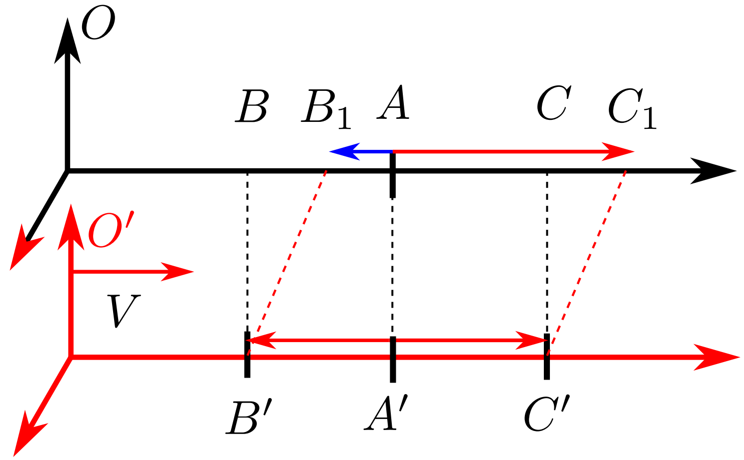
- wszystkie zjawiska fizyczne przebiegają w identyczny sposób we wszystkich inercjalnych układach odniesienia (prawa fizyki obowiązują w ich „zwykłej” postaci)

- w każdym inercjalnym układzie odniesienia prędkość światła jest stała i wynosi c (prędkość światła jest maksymalną prędkością z jaką może rozchodzić się oddziaływanie)

Konstruując swoją teorię Einstein założył iż równania elektrodynamiki Maxwella powinny być niezmiennicze względem transformacji między układami inercjalnymi (występuje w nich prędkość światła) – postulat 1.
Czy znał wyniki eksperymentu MM (postulat 2)?   Być może.

Mechanika relatywistyczna poprawnie opisuje dynamikę układów ciał poruszających się z dużymi prędkościami, a w granicy małych prędkości odtwarza wyniki przewidywane przez mechanikę klasyczną.

Treść pierwszego postulatu jest identyczna jak w mechanice klasycznej.
Jednak drugi postulat wymusza rezygnację z bezwzględności czasu.



Przykład.

W O' sygnał świetlny wysłany z A' dotrze w tym samym czasie do B' i C'.

W O sygnał dotrze wcześniej do B (B_1) bo ten porusza się w stronę źródła, a później do C (C_1) bo ten oddala się od źródła.

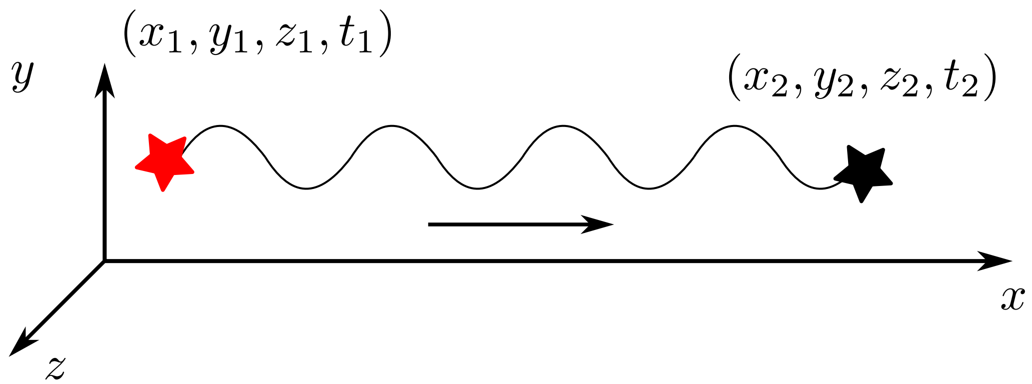
Pojęcie równoczesności zdarzeń traci swój uniwersalny charakter bo zależy od układu odniesienia.

Czas, w zależności od układu, w różny sposób będzie numerował kolejność zdarzeń.

W mechanice relatywistycznej zdarzenie określamy przez podanie czasu i miejsca,
w którym zachodzi w wyróznionym układzie odniesienia.

Zbiór wszystkich możliwych realizacji chwil czasowych i położeń nazywamy czasoprzestrzenią.

Przedział (interwał) czasoprzestrzenny.



W układzie O sygnał rozchodzi się z prędkością c, więc droga dana jest wzorem

$$s = c(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

co można zapisać dla układu O

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$$

i dla układu O' (ze względu na identyczną prędkość światła)

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = 0$$

Wielkość występująca po lewej stronie zeruje się niezależnie od układu odniesienia, nazywamy ją przedziałem czasoprzestrzennym.

Przedział czasoprzestrzenny możemy definiować dla zdarzeń dowolnej natury

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Dla zdarzeń „nieskończenie bliskich” w czasoprzestrzeni możemy zdefiniować jego różniczkę

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Jeśli interwał zeruje się w układzie O to zeruje się również w innym inercjalnym układzie O’.

Ponieważ przestrzeń jest jednordona i izotropowa, a czas jednorodny, możemy założyć
iż różniczki przedziałów czasoprzestrzennych w O i O’ są takie same

$$ds' = ds$$

skąd wynika równość interwałów

$$s' = s$$

Uwagi:

- założenie o równości różniczek nie wynika z definicji przedziału czasoprzestrzennego
- założenie to nie jest sprzeczne z postulatami Einsteina
- wprowadzamy je aby ułatwić wyprowadzenie związków transformacyjnych dla współrzędnych położeniowych i czasu

Transformacja Lorentza

Założenie: Układ O' porusza się względem O z prędkością $\vec{V} = [V,\, 0,\, 0]$
i w chwili początkowej ich początki się pokrywają

W mechanice klasycznej słuszne były transformacje Galileusza (czas był bezwzględny)

$$t' = t \qquad y' = y$$

$$x' = x - V\,t \qquad z' = z$$

W mechanice relatywistycznej rezygnujemy z bezwzględności czasu,
ale możemy wykorzystać interwał czasoprzestrzenny

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

który określa odległość pomiędzy punktami w czasoprzestrzeni (w układzie O)

$$(0,0,0,0) \Leftrightarrow (t,x,y,z)$$

Zgodnie z założeniem w chwili początkowej, początki układów pokrywały się,
możemy więc określić przedział czasoprzestrzenny w O'

$$s'^{\,2} = c^2 t'^{\,2} - x'^{\,2} - y'^{\,2} - z'^{\,2}$$

i wykorzystać równość przedziałów

$$s^2 = s'^{\,2}$$

W celu ułatwienia sobie rachunków (co nie jest konieczne) wprowadzamy nową zmienną

$$\tau = ict$$

$$-s^2 = \tau^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

$$-s'^2 = \tau'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Uwaga: $-s^2$ możemy interpretować jako kwadrat długości czterowymiarowego wektora

$$(\tau, x, y, z)$$

którego długość nie ulegnie zmianie przy obrocie układu

$$-s'^2 = -s^2$$

dlatego przejście pomiędzy układami inercjalnymi O i O' traktujemy jako obrót

Układ O' porusza się względem O wzdłuż kierunku x, co nie zmienia współrzędnych y i z

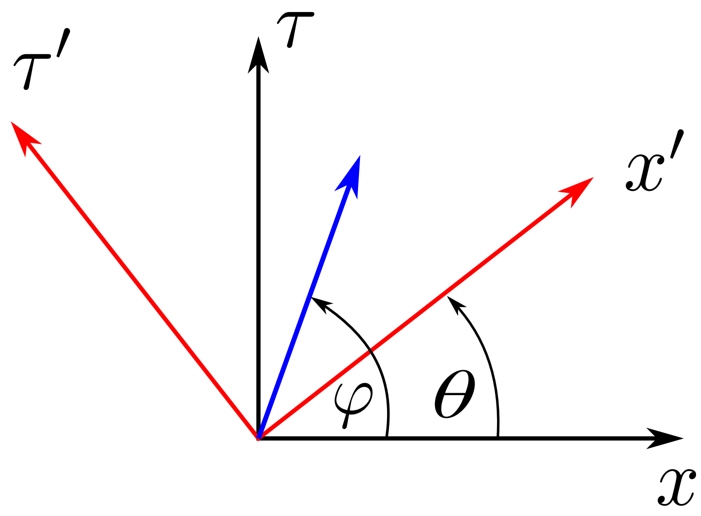
$$y' = y$$
$$z' = z$$

dlatego transformacja związana jest z obrotem w płaszczyźnie

$$(\tau, x)$$

Obrót w płaszczyźnie opisuje transformacja

$$\begin{bmatrix} x' \\ \tau' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix}$$



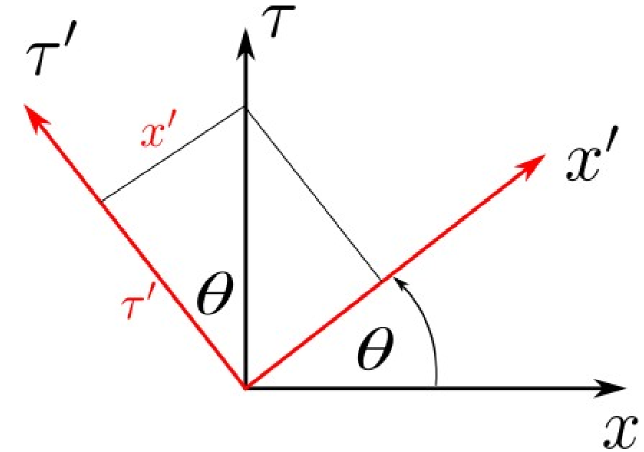
kąt obrotu zależy wyłącznie od prędkości V

$$x' = cos\theta\, x + sin\theta\, \tau$$

$$\tau' = -sin\theta\, x + cos\theta\, \tau$$

Położenie początku układu O ma współrzędną
(τ oznacza upływ czasu – więc się zmienia)

$$x = 0$$



natomiast w układzie O' jego położenie określają
związki transformacyjne

$$x' = sin\theta\, \tau$$

$$\tau' = cos\theta\, \tau$$

$$\Rightarrow \frac{x'}{\tau'} = tg\theta$$

Wiemy, że początek układu O porusza się w O'
z prędkością -V

$$x' = -V\, t'$$

$$\frac{x'}{\tau'} = \frac{x'}{ict'} = i\frac{V}{c}$$

$$tg\theta = i\frac{V}{c}$$

Korzystamy z tożsamości trygonometrycznych

$$sin\theta = \frac{tg\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}} = \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

które wstawiamy do związków transformacyjnych obrotu

$$x' = cos\theta\, x + \; sin\theta\, \tau = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\, x + \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\, \tau$$

$$\tau' = -sin\theta\, x + \; cos\theta\, \tau = \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\, x + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\, \tau$$

po podstawieniu $\tau = i\, c\, t$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \qquad x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,(x - V\,t) \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \qquad x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(x - V\,t\right)$$

Jeśli założymy

$$c >> V \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V}{c} \approx 0$$

to otrzymamy transformację Galileusza.

Zapis skrótowy transformacji Lorentza

$$\beta = \frac{V}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta\,x}{c}\right) \qquad x' = \gamma\left(x - \beta\,c\,t\right)$$

Zgodnie z t. Lorentza niemożliwy jest ruch ciał z prędkością większą niż c, bo

$$V > c \rightarrow \beta > 1 \rightarrow \gamma = \mathrm{urojone}$$

a wielkości fizyczne jak czas i położenie muszą być rzeczywiste.

Odwrotna transformacja Lorentza (z O' do O)

Otrzymamy ją zmieniając kąt obrotu $\theta \to -\theta$

lub bezpośrednio odwracając zależności we wzorach na

$$x' = x'(x,t) \to x = x(x',t')$$

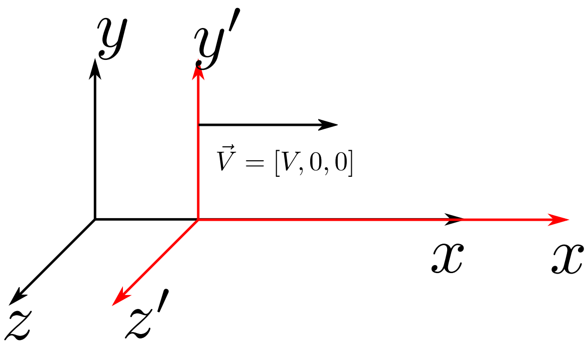
$$t' = t'(x,t) \to t = t(x',t')$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right)$$

$$x = \gamma\,(x' + \beta\, c\, t')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$



Kontrakcja długości

Układ O’ porusza się względem O z prędkością V wzdłuż kierunku x.
W układzie O spoczywa pręt o długości l. W tej samej chwili

$$t_1 = t_2$$

dokonujemy pomiaru jego długości tj.:

- wyznaczamy położenie jego początku x_1 w chwili t_1 (1 zdarzenie)
- wyznaczamy położenie jego końca x_2 w chwili t_2 (2 zdarzenie)

Długość pręta w układzie O

$$l = x_2 - x_1$$

Postępując podobnie w układzie O’ (pomiar jednoczesny) otrzymamy

$$l' = x'_2 - x'_1$$

ale … dwa jednoczesne zdarzenia w O’ nie są jednoczesne w O
co wynika z transformacji Lorentza

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{\beta}{c} x'_1 \right) \qquad t'_1 = t'_2$$

$$t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{\beta}{c} x'_2 \right) \qquad x'_1 \neq x'_2$$

Położenia końców pręta w układzie O’ zapiszmy używając wsp. układu O

$$x'_2 = \gamma\,(x_2 - \beta\,c\,t_2)$$

$$x'_1 = \gamma\,(x_1 - \beta\,c\,t_1)$$

$$l' = x'_2 - x'_1 = \gamma\left[x_2 - x_1 - \beta\,c\,\gamma\left(t'_2 + \frac{\beta}{c}x'_2 - t'_1 - \frac{\beta}{c}x'_1\right)\right]$$

Wykorzystując fakt iż w O’ pomiar końców pręta odbył się w tej samej chwili

$$l' = \gamma\,l - \beta^2\gamma^2 l'$$

$$(1+\beta^2\gamma^2)l' = \gamma l$$

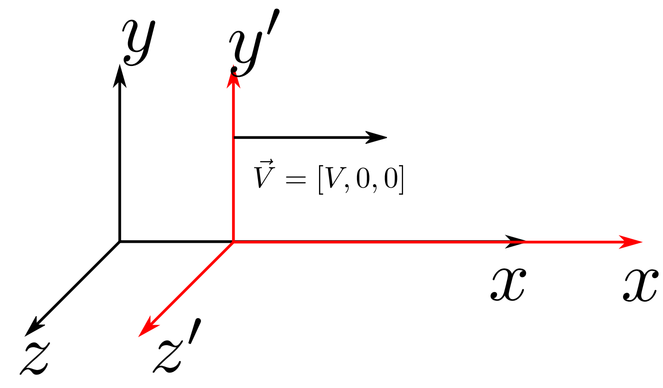
$$\left(1 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)\,l' = \gamma\,l$$

$$\frac{1}{1-\beta^2}l' = \gamma\,l$$

$$\gamma^2\,l' = \gamma\,l$$

$$l' = \frac{1}{\gamma}l = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}l\,<\,l$$

- w układzie, w którym pręt spoczywa jego długość jest największa
- w układzie poruszającym się względem niego, jego długość ulega skróceniu



Dylatacja czasu

Zakładamy że początki układów O i O' pokrywają się w pewnej chwili.
Układ O' porusza się względem O z prędkością V wzdłuż osi x.

W początku układu O spoczywa zegar, jakie będą jego wskazania
w układzie O' w kolejnych chwilach czasu?

Wykorzystujemy fakt iż w O zegar spoczywa

$$x = 0$$

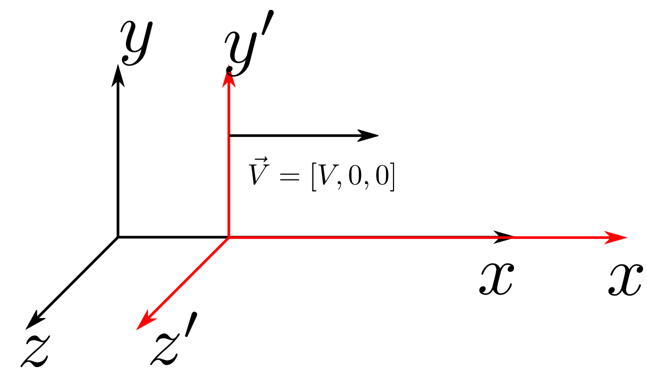
i dostajemy relację pomiędzy wskazaniami zegara w O i O'

$$t' = \gamma\, t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\, t > t$$

W układzie poruszającym się względem zegara, mierzymy większy upływ czasu.

Najkrótszy czas pokazuje zegar w układzie, w którym spoczywa.
Czas ten nazywamy czasem własnym układu.

Transformacja prędkości



W układzie O' ciało porusza się z prędkością

$$\vec{v}\,' = \left[\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right]$$

Jaką prędkość ma to ciało w O?

Składowa x-owa prędkości

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = \gamma(dx' + V dt')$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + V dt')}{\gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{\dot{x}' + V}{1 + \frac{V\dot{x}'}{c^2}}$$

oraz dla kierunków y i z

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)} = \frac{1}{\gamma}\frac{\frac{dy'}{dt'}}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{\dot{y}'}{1 + \frac{V\dot{x}'}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

$$\dot{z} = \frac{\dot{z}'}{1 + \frac{V\dot{x}'}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

W granicy $\frac{V}{c} \to 0$ oraz $\frac{\dot{x}'}{c} \to 0$

otrzymujemy transformację Galileusza, która jest szczególnym przypadkiem transformacji Lorentza.

Rozważmy jeszcze jak będzie się zmieniać prędkość v dla rosnących wartości v'.
Dla składowej x-owej mamy

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}}$$

$$\frac{dv_x}{dv'_x} = \frac{1}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}} - \frac{(v'_x + V)\frac{V}{c^2}}{\left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)^2} = \frac{1 + \frac{V v'_x}{c^2} - \frac{V v'_x}{c^2} - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)^2} > 0$$

Ponieważ $V<c$ więc v_x jest rosnącą funkcją v'_x.

Jaka może być maksymalna prędkość w O?

Podstawmy $v'_x = c$

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{Vc}{c^2}} = c$$

Czyli w układzie O' oraz w O uzyskaliśmy taką samą prędkość światła – w zgodzie z 2 postulatem Einsteina.