W3. Plan wykładu

- prawa zachowania wielkości fizycznych, całki ruchu
- funkcja Hamiltona
- równania ruchu Hamiltona
- nawiasy Poissona

Prawa zachowania, całki ruchu

Wśród obserwowanych przez nas wielkości fizycznych szczególne znaczenie mają te, które są stałe w czasie (lub inaczej: zachowane).

Wielkości fizyczne stałe w czasie nazywamy **całkami ruchu** a ich istnienie związane jest z określonym **prawem zachowania**.

Ich znaczenie dla nas wynika z faktu, iż wiedza o istnieniu całek ruchu pozwala znacznie uprościć rozwiązanie problemu oraz ułatwia analizę rozwiązań (dynamiki układu).

Przypadek ogólny

Układ o n stopniach swobody opisywany jest przez 2n wielkości zależnych od czasu tj. współrzędnych i prędkości uogólnionych:

$$q_\alpha,\ \dot{q}_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, n$$

Szukamy niezmieniających się w czasie funkcji opisujących te wielkości

$$f(q_\alpha, \dot{q}_\alpha) = const$$

Funkcje opisujące trajektorię układu znajdujemy rozwiązując układ:

- n równań różniczkowych 2 rzędu
- lub układ 2n rów. różniczkowych 1 rzędu

co wymaga podania 2n warunków początkowych czyli 2n stałych

$$c_1,\ c_2, \ldots,\ c_{2n}$$

od których musi zależeć postać rozwiązań (trajektorii)

$$q_\alpha = q_\alpha(t,\ c_1, c_2, \ldots, c_{2n})$$

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(t,\ c_1, c_2, \ldots, c_{2n})$$

Odwróćmy zagadnienie

- chcemy wyrazić stałe $c_1, c_2, \ldots$ przez współrzędne i prędkości uogólnione
- to wymagałoby rozwiązania odpowiedniego układu równań,
  ale otrzymamy wówczas wielkości stałe w czasie zależne jednak
  od wielkości zmiennych (położenia i prędkości)

Ustalając chwilę początkową ruchu układu usuwamy jedną ze stałych

$$c_{2n} = t_0$$

i pozostaje 2n-1 wielkości, czyli całek ruchu, które możemy wyznaczyć.

Wniosek: w układzie o n stopniach swobody można wyznaczyć 2n-1 całek ruchu.

Największe znaczenie mają całki ruchu związane z własnościami:

- jednorodnością i izotropowością przestrzeni
- jednorodnością czasu

Energia

Poszukajmy całki ruchu związanej z jednorodnością czasu.
W układzie izolowanym L nie zawiera jawnej zależności od t $\longrightarrow$ $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Wniosek: wartość zupełnej pochodnej czasowej L związana jest
z zależnością współrzędnych i prędkości od czasu

$$\frac{dL}{dt} = \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right)$$

z równania Lagrange'a mamy

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_\alpha \left(\dot{q}_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d\dot{q}_\alpha}{dt} \right) = \sum_\alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) = \frac{d}{dt} \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right)$$

Otrzymaliśmy wyrażenie (poprzedni slajd)

$$\frac{dL}{dt} = \sum_\alpha \left(\dot{q}_\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{d\dot{q}_\alpha}{dt} \right) = \sum_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha \right) = \frac{d}{dt}\sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha \right)$$

co możemy zapisać w zwartej postaci (przenosząc L na prawą stronę)

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L \right) = 0$$

oraz

$$\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L = E = const$$

Wnioski:

- wielkość E ma wymiar energii i jest zachowana dla układu izolowanego, E jest energią całkowitą układu

- jeżeli układ znajduje się w polu sił zewnętrznych niezależnych od czasu to jego energia jest zachowana (bo w L nie ma jawnej zależności od t) - układy zachowawcze

W L zależność od prędkości występuje w energii kinetycznej T, możemy więc zapisać (wsp. kartezjańskie)

$$\sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = 2T$$

$$E = 2T(q, \dot{q}) - L$$

podstawiając teraz

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q)$$

możemy wyrazić energię całkowitą układu

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q)$$

która jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej.

Pęd

Wyznaczymy całkę ruchu związaną z jednorodnością przestrzeni.

- rozważamy izolowany układ N cząstek
- ze względu na brak potencjałów zewnętrznych brak jest wyróżnionych punktów w przestrzeni – jednorodność przestrzeni

Dokonujemy infinitezymalnego, równoległego przesunięcia całego układu w przestrzeni

$$\vec{r} \to \vec{r} + \vec{\varepsilon}$$

tj. dokonujemy translacji każdego ciała w układzie

$$\vec{r}_a \to \vec{r}_a + \vec{\varepsilon} \qquad (a = 1, 2, \ldots, N)$$

$$r_{a,i} \to r_{a,i} + \varepsilon_i$$

i żądamy niezmienniczości L względem tej operacji (nie powinien zależeć od wyboru układu)

$$\delta L = \sum_{a,i} \frac{\partial L}{\partial r_{a,i}} \varepsilon_i = \sum_i \varepsilon_i \sum_a \frac{\partial L}{\partial r_{a,i}} = 0$$

ponieważ przesunięcia ε_i są skończone, dostajemy warunek

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial r_{a,i}} = 0$$

Korzystając z równania Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial r_{a,i}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{a,i}}$$

warunek niezmienniczości L

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial r_{a,i}} = 0$$

zamieniamy na

$$0 = \sum_a \frac{\partial L}{\partial r_{a,i}} = \sum_a \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{a,i}} = \frac{d}{dt}\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{a,i}}$$

które daje kolejną całkę ruchu

$$P_i = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{a,i}} = const$$

Dla L wyrażonego we współrzędnych kartezjańskich

$$L = \sum_{a,i} \frac{m_a}{2} \dot{r}_{a,i}^2 - U(r_i)$$

jawna postać całki ruchu jest następująca

$$P_i = \sum_a m_a \dot{r}_{a,i}$$

trzy składowe tej wielkości stanowią pęd całkowity układu

$$\vec{P} = \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a$$

Wróćmy jeszcze do warunku niezmienniczości L względem translacji

$$0 = \sum_a \frac{\partial L}{\partial r_{a,i}} = -\sum_a \frac{\partial U}{\partial r_{a,i}} = \sum_a F_{a,i} = F_i$$

który w swej postaci wyraża trzecią zasadę dynamiki Newtona (zasada akcji i reakcji).

Pęd we współrzędnych kartezjańskich przyjmuje znaną postać

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\,\dot{r}_i$$

Uwagi:

- w układzie N cząstek, pęd pojedynczej cząstki nie jest całką ruchu
- całką ruchu jest pęd całego układu

Wielkość tę możemy zdefiniować dla L wyrażonego we współrzędnych uogólnionych

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

p_α nazywamy pędem uogólnionym sprzężonym ze współrzędną uogólnioną q_α

Uwagi:

- dla współrzędnych kartezjańskich pęd uogólniony ma ten sam wymiar co pęd definiowany na podstawowym kursie fizyki
- we współrzędnych krzywoliniowych wymiar pędu uogólnionego może być inny (i oczywiście jego interpretacja)
- pędy uogólnione są liniowymi funkcjami prędkości

Pokazaliśmy, że: $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = F_\alpha \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt}p_\alpha = F_\alpha$

Moment pędu

Wykorzystajmy kolejną własność przestrzeni – izotropowość
(brak wyróżnionego kierunku w przestrzeni)

Zapiszmy związek wsp. kartezjańskich i sferycznych

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi$$
$$y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi$$
$$z = r\,\cos\theta$$

Dokonajmy infinitezymalnego obrotu δφ całego układu wokół osi „z”

$$x' = r\,\sin\theta\,\cos(\varphi+\delta\varphi) = x\,\cos(\delta\varphi) - y\,\sin(\delta\varphi)$$
$$y' = r\,\sin\theta\,\sin(\varphi+\delta\varphi) = x\,\sin(\delta\varphi) + y\,\cos(\delta\varphi)$$
$$z' = r\,\cos\theta = z$$

skoro obrót ma być „nieskończenie mały” to możemy przyjąć

$$\cos(\delta\varphi) = 1 - \frac{(\delta\varphi)^2}{2} + \frac{(\delta\varphi)^4}{24} + O(\delta\varphi^6) \approx 1$$
$$\sin(\delta\varphi) = (\delta\varphi) - \frac{(\delta\varphi)^3}{6} + \frac{(\delta\varphi)^5}{120} + O(\delta\varphi^7) \approx \delta\varphi$$

Policzmy zmianę wektora wodzącego

$$\delta\vec{r} = \vec{r}^{\,\prime} - \vec{r} = \sin(\delta\varphi)[-y, x, 0]$$

i prędkości

$$\delta\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}^{\,\prime} - \dot{\vec{r}} = \sin(\delta\varphi)[-\dot{y}, \dot{x}, 0]$$

Zażądajmy niezmienniczości L względem takiego obrotu

$$\delta L = \sum_{a,i} \frac{\partial L}{\partial r_{a,i}} \delta r_{a,i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{a,i}} \delta \dot{r}_{a,i} = 0$$

wiemy już że

$$\frac{\partial L}{\partial r_{a,i}} = \dot{p}_{a,i} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{a,i}} = p_{a,i}$$

co wykorzystujemy

$$\delta L = \sum_{a,i} (\dot{p}_{a,i} \delta r_{a,i} + p_{a,i} \delta \dot{r}_{a,i}) = \sum_a \left(\dot{\vec{p}}_a \cdot \delta \vec{r}_a + \vec{p}_{a,i} \cdot \delta \dot{\vec{r}}_{a,i} \right) = \sum_a \frac{d}{dt} (\vec{p}_a \cdot \delta \vec{r}_a)$$

ze względu na liniowość operatora różniczkowego możemy zapisać

$$\delta L = \frac{d}{dt} \sum_a (\vec{p}_a \cdot \delta \vec{r}_a) = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_a \cdot \delta \vec{r}_a &= [p_{x_a}, p_{y_a}, p_{z_a}] \cdot \sin(\delta\varphi)[-y_a, x_a, 0] \\ &= \sin(\delta\varphi)[0, 0, x_a p_{y_a} - y_a p_{x_a}] \cdot \hat{e}_z = \sin(\delta\varphi)\,(\vec{r}_a \times \vec{p}_a) \cdot \hat{e}_z = j_z \end{aligned}$$

$$\vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = (x\,p_y - y\,p_x)\hat{e}_z = j_z \hat{e}_z$$

Ze względu na dowolny wybór δφ oraz dowolny wybór kierunku osi obrotu możemy uogólnić wynik

$$\delta L = \sin(\delta\varphi)\frac{d}{dt}\sum_a (\vec{r}_a \times \vec{p}_a)\cdot\widehat{r} = 0$$

otrzymujemy kolejną całkę ruchu

$$\sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a = \vec{J} = const$$

która jest całkowitym momentem pędu układu

$$\vec{J} = \sum_a \vec{j}_a$$

Uwagi:

- wynik uzyskaliśmy dla składowej J_z wyróżniając w przestrzeni kierunek ''z''
- jeśli jako oś wokół której obracamy układ wybierzemy inny (dowolny) kierunek, nie pokrywający się z osiami x,y,z to wynik nadal będzie słuszny ale dla całego wektora momentu pędu (a nie tylko jednej składowej)
- całkowity moment pędu jest zachowany gdy:
  - układ jest izolowany
  - w polu sił centralnych (zależnych od odległości, a nie od kątów) – brak wyróżnionych kierunków
  - w polu sił wyróżniających kierunek, ale zachowują symetrię obrotową (np. siła Lorentza)

Zmienne cykliczne a całki ruchu

Analizując równanie Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

zauważmy że gdy

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \rightarrow \quad \frac{d}{dt} p_\alpha = 0 \rightarrow \quad p_\alpha = const$$

Brak zależności L od jakiejś współrzędnej q_α powoduje, że pęd uogólniony p_α jest zachowany w trakcie ruchu.

Współrzędną q_α nazywamy zmienną cykliczną, a pęd uogólniony z nią sprzężony jest całką ruchu.

Przykład.
Ruch cząstki w polu sił centralnych (współrzędne sferyczne)

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 r^2\right) - U(r)$$

W funkcji L nie występuje zmienna φ – jest zmienną cykliczną i możemy podać całkę ruchu tj. sprzężony z nią pęd uogólniony

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\,\dot{\varphi}\,r^2 \sin^2\theta$$

który jest z-ową składową momentu pędu.

Równania kanoniczne Hamiltona

W formalizmie Lagrange'a posługiwaliśmy się współrzędnymi i prędkościami uogólnionymi.

Posługiwanie się prędkościami nie zawsze jest możliwe (mechanika kwantowa)
lub może być problematyczne (niektóre modele dynamiki molekularnej)

Do opisu dynamiki układu używamy wówczas współrzędnych i pędów uogólnionych
w tzw. formalizmie Hamiltona, czyli zastąpimy

$$L(t, q, \dot{q}) \quad \to H(t, q, p)$$

musimy jednak dokonać formalnego przejścia z L do H.

Korzystając ze znanych zależności

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \dot{p}_\alpha \qquad\qquad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

możemy przekształcić różniczkę L

$$dL = \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha \right)$$

do postaci

$$\begin{aligned} dL &= \sum_\alpha (\dot{p}_\alpha dq_\alpha + p_\alpha d\dot{q}_\alpha) = \sum_\alpha (\dot{p}_\alpha dq_\alpha + \underline{p_\alpha d\dot{q}_\alpha} + \underline{dp_\alpha \dot{q}_\alpha} - dp_\alpha \dot{q}_\alpha) \\ &= d\sum_\alpha \underline{p_\alpha \dot{q}_\alpha} + \sum_\alpha (\dot{p}_\alpha dq_\alpha - \dot{q}_\alpha dp_\alpha) \end{aligned}$$

równanie

$$dL = d\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha + \sum_\alpha (\dot{p}_\alpha dq_\alpha - \dot{q}_\alpha dp_\alpha)$$

przekształcamy do postaci

$$d\left(\sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\right) = -\sum_\alpha (\dot{p}_\alpha dq_\alpha - \dot{q}_\alpha dp_\alpha)$$

lewą stronę traktujemy jako różniczkę zupełną nowej funkcji

$$H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L$$

która jest równa energii całkowitej układu

$$H = E$$

Ponieważ różniczka zupełna funkcji Hamiltona H

$$dH = \sum_\alpha (\dot{q}_\alpha dp_\alpha - \dot{p}_\alpha dq_\alpha)$$

zależy od dq_α i dp_α, więc argumentami tej fukcji są q_α i p_α.

$$H = H(q, p, t)$$

Z porównania

$$dH = \sum_{\alpha} (\dot{q}_\alpha dp_\alpha - \dot{p}_\alpha dq_\alpha) = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \right)$$

możemy określić równania ruchu Hamiltona

$$\boxed{\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}} \qquad \boxed{\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}}$$

które stanowią układ 2f równań różniczkowych 1 rzędu.

Jeśli równania Hamiltona są spełnione to pochodna czasowa funkcji Hamiltona

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{a} \left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{\alpha} (-\dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha + \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

związana jest z jawną zależnością od t.

Jeśli jej brak to

$$H = H(q,p) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad H = T + U = const$$

energia układu jest zachowana.

Przykład: konstrukcja funkcji Hamiltona cząstki oddziałującej z potencjałem zależnym od położenia

Rozważmy problem we **współrzędnych cylindrycznych**, zaczynamy od konstrukcji lagranżjanu

$$L = L(\vec{r}, \vec{V}) = L(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z})$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - U(\rho, \varphi, z)$$

Aby wyznaczyć H, korzystamy z definicji

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

ale H zależy od współrzędnych i **pędów** uogólnionych

$$H = H(\vec{r}, \vec{p}) = H(\rho, \varphi, z, \dot{p}_\rho, \dot{p}_\varphi, \dot{p}_z)$$

wniosek: musimy wyrazić prędkości za pomocą pędów i wstawić je do równania definicyjnego

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - U(\rho, \varphi, z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} = p_\rho \implies \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = p_\varphi \implies \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = p_z \implies \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

Teraz korzystamy z równania definicyjnego

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

$$H = \dot{\rho} p_\rho + \dot{\varphi} p_\varphi + p_z \dot{z} - \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + U(\rho, , z)$$

prędkości wyrażamy za pomocą współrzędnych i pędów uogólnionych

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \qquad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

Po podstawieniu i zredukowaniu wyrazów otrzymujemy funkcję Hamiltona

$$H = H(\vec{r}, \vec{p}) = H(\rho, \varphi, z, \dot{p}_\rho, \dot{p}_\varphi, \dot{p}_z)$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + U(\rho, \varphi, z)}$$

i jeszcze równania ruchu Hamiltona – jest ich 6 (liczba stopni swobody)

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = -\dot{p}_\rho \qquad \frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\dot{p}_\varphi \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = -\dot{p}_z$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \dot{\rho} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dot{\varphi} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_z} = \dot{z}$$

Nawiasy Poissona

W formalizmie Hamiltona wielkości fizyczne są funkcjami współrzędnych i pędów uogólnionych, np.

$$f = f(q, p, t)$$

Policzmy zupełną pochodną czasową f

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \right)$$

i skorzystajmy z równań Hamiltona

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) = (f, H) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Wyrażenie

$$(f, H) = \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right)$$

stanowi definicję nawiasu Poissona funkcji f i funkcji Hamiltona.

Załóżmy teraz że f nie zależy jawnie od t

$$f = f(q,p) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

jeśli wówczas zachodzi

$$(f,H) = 0$$

to f jest całką ruchu

$$f(q,p) = const$$

Nawias Poissona możemy definiować dla dowolnych dwóch wielkości,
wystarczy jeśli są funkcjami q i p

$$(A,B) = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial B}{\partial q_\alpha}\frac{\partial A}{\partial p_\alpha} \right)$$

Odpowiednikiem nawiasu Poissona jest komutator w mechanice kwantowej,
pozwala on określić np. ewolucję czasową operatora nie będącego obserwablą
(nie jest wielkością mierzalną – np. wspomniana wcześniej prędkość).

Własności nawiasów Poissona:

1. $(A, B) = -(B, A)$
2. $(A, A) = 0$
3. $(A + B, C) = (A, C) + (B, C)$
4. $(AB, C) = A(B, C) + (A, C)B$
5. $((A, B),\ C) + ((C, A),\ B) + ((B, C),\ A) = 0$
6. $(A, w) = 0, \quad (wA, B) = w(A, B), \quad w = const$
7. $(q_i, q_j) = 0, \quad (p_i, p_j) = 0, \quad (q_i, p_j) = \delta_{i,j}$
8. $(A, q_i) = -\dfrac{\partial A}{\partial p_i}$
9. $(A, p_i) = \dfrac{\partial A}{\partial q_i}$
10. $(j_x, j_y) = -j_z$