

W2. Plan wykładu

- Transformacja Galileusza, jednorodność i izotropowość czasu i przestrzeni
- Funkcja Lagrange'a: cząstki swobodnej, w polu potencjalnym, układu wielu cząstek
- Transformacja ze współrzędnych kartezjańskich do wsp. uogólnionych
- Funkcja Lagrange'a we współrzędnych krzywoliniowych
- Przykłady zastosowań formalizmu Lagrange'a:
 - cząstka w polu centralnego potencjału
 - wahadło matematyczne
 - bryła sztywna

Układ inercjalny – to układ w którym **ruch swobodny** odbywa się ze stałą prędkością.

W układzie inercjalnym przestrzeń jest jednorodna i izotropowa, a czas jednorodny.

Oznacza to że:

- w przestrzeni nie ma wyróżnionych punktów i kierunków
- w czasie nie ma wyróżnionych chwil czasowych

Dowolny układ odniesienia poruszający się względem układu inercjalnego ze stałą prędkością jest również inercjalny.

Wynika stąd że w dowolnym układzie inercjalnym obowiązują te same prawa fizyki (w odróżnieniu od układów nieinercjalnych, w których pojawiają się np. dodatkowe siły nie występujące w innych układach – siła Coriolisa, siła odśrodkowa itp.)

Inercjalność układów odniesienia pozwala na dużą swobodę ich wyboru w trakcie rozwiązywania problemów. Przejście pomiędzy dwoma układami odniesienia nazywamy transformacją.

W mechanice klasycznej duże znaczenie ma transformacja Galileusza.

Transformacja Galileusza

Opisuje ona związki pomiędzy położeniami i prędkościami przy przejściu pomiędzy dwoma układami inercyjnymi (a dlaczego nie pomiędzy przyspieszeniami?)

$$(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \rightarrow (\vec{r}', \dot{\vec{r}}')$$

Zakładamy też: $t = t'$

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \vec{V}t$$

$$\vec{r} = \vec{R}(t) + \vec{r}' = \vec{R}(0) + \vec{V}t + \vec{r}'$$

Różniczkując ostatnie wyrażenie

$$\dot{\vec{r}} = \vec{V} + \dot{\vec{r}}'$$

dostajemy klasyczne prawo dodawania prędkości

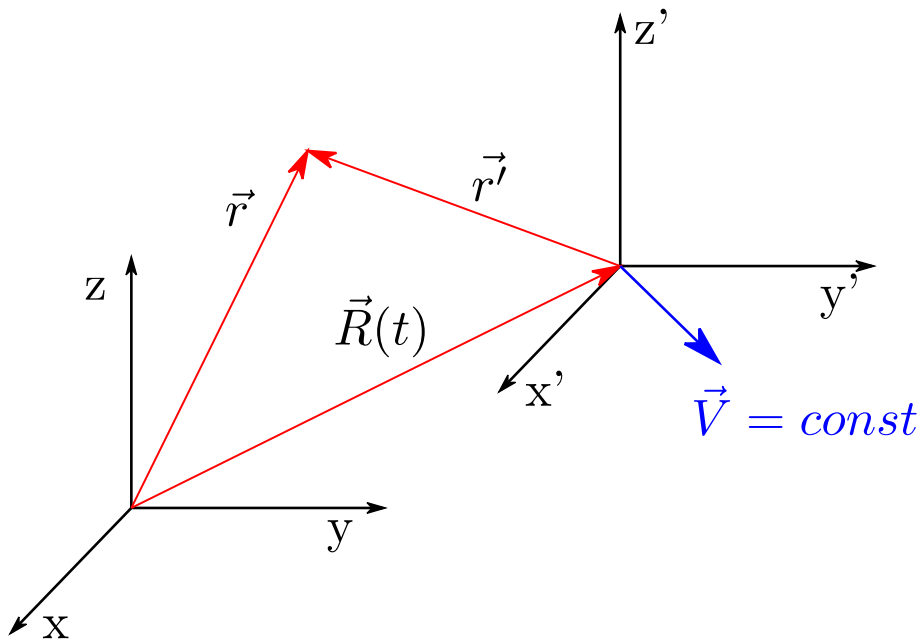
Zróżniczkujemy jeszcze raz

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}'$$

Przyspieszenia są takie same, więc:

$$F(\vec{r}) = F(\vec{r}')$$

druga zasada dynamiki Newtona ma taką samą postać we wszystkich układach inercyjnych



Uwaga 1: transformacja Galileusza zakłada istnienie czasu uniwersalnego (bezwzględnego) we wszystkich układach inercyjnych ($t=t'$)

Uwaga 2: prawa fizyki są niezmiennicze względem transformacji Galileusza

Konstrukcja funkcji Lagrange'a cząstki swobodnej w układzie inercyjnym

Założenia:

- układ nie oddziałuje z otoczeniem (izolowany)
- położenie cząstki określa trójwymiarowy wektor wodzący
- składowe położenia i prędkości traktujemy jako współrzędne uogólnione

$$L(q, \dot{q}, t) = L(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Ze względu na jednorodność przestrzeni translacja nie powinna zmieniać L (**wybór układu wsp. jest arbitralny**)

Wniosek: L (cząstki swobodnej) nie może zależeć od położenia

$$L = L(\vec{v})$$

Ze względu na izotropowość przestrzeni (**brak wyróżnionego kierunku**), L nie może zależeć od kierunku prędkości a jedynie od długości wektora V , np.

$$\vec{v}^2, \vec{v}^4, \vec{v}^6, \dots$$

Czy możliwa jest inna zależność $L(V)$? np.:

$$|\vec{v}|, \sqrt{v}$$

Co wybrać?

Warunek: **należy wybrać taką zależność $L(V)$, która zapewni niezmienniczość równań ruchu względem Transformacji Galileusza.**

Taki wybór zapewnia funkcja:
$$L(\vec{v}) = C \cdot \vec{v}^2, \quad C = const$$

Jak zachowa się L podczas transformacji Galileusza?

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \quad \vec{v}' = \dot{\vec{r}'}$$

$$L(\vec{v}) = C\vec{v}^2 = C(\vec{v}' + \vec{V})^2 = C\vec{v}'^2 + 2C\vec{v}'\vec{V} + C\vec{V}^2 = C\vec{v}'^2 + \underbrace{\frac{d}{dt}(2C\vec{r}'\vec{V} + C\vec{V}^2t)}_{\frac{d}{dt}f(\vec{r},t)}$$

Jaki jest wpływ $f(r,t)$ na równania ruchu?

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\right) \frac{d}{dt}f(r,t) &= \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\dot{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial t} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\dot{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial t} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\dot{r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial t}\right) = 0 \end{aligned}$$

Pomijając nieistotny wkład od zupełnej pochodnej czasowej f otrzymujemy

$$L(\vec{v}) = C\vec{v}^2 \iff L(\vec{v}') = C\vec{v}'^2$$

zatem, taka postać L umożliwi identyczny opis zjawisk w obu układach (identyczne równania ruchu).

Wartość stałej C jest dowolna, przyjmijmy

$$C = \frac{m}{2}$$

i wówczas otrzymujemy znane wyrażenie

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 = T$$

gdzie T jest energią kinetyczną układu.

Użyjmy L do znalezienia równań ruchu – wstawmy je do równania Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{r}_i} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = -\frac{d}{dt} m \dot{r}_i = -m \ddot{r}_i$$

Zgodnie z oczekiwaniami otrzymaliśmy

$$m \ddot{r}_i = 0$$

równanie ruchu opisujące cząstkę swobodną w układzie inercyjnym.

Zauważmy, że:

- wychodząc z ogólnych rozważań dotyczących własności przestrzeni i czasu oraz narzucając warunek niezmienniczości równań ruchu względem transformacji Galileusza uzyskaliśmy poprawną postać funkcji Lagrange'a
- wykorzystaliśmy też własność niejednoznaczności L – patrz zupełna pochodna czasowa f
- zaproponowana funkcja Lagrange'a spełnia postulat najmniejszego działania dla ruchu rzeczywistego - bo otrzymaliśmy poprawne równanie ruchu.

Uogólnijmy wynik na układ N nieoddziałujących cząstek

$$L = \sum_{n=1}^N L_n = \sum_{n=1}^N T_n = T$$

- lagranżjan jest całkowitą energią kinetyczną układu.

Funkcja Lagrange'a dla cząstki w polu potencjalnym.

Funkcję L musimy zmodyfikować o wyraz zawierający informację o potencjale.
Energję potencjalą która jest funkcją położenia

$$U = U(\vec{r})$$

wstawmy do L np. odejmując go od T (wymiar obu wielkości jest identyczny – energia)

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = T(\dot{\vec{r}}) - U(\vec{r})$$

i wyznaczmy równania ruchu (aby sprawdzić czy znak przy U jest właściwy)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = m\ddot{r}_i + \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial r_i} = 0$$

$$m\ddot{r}_i = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial r_i} \quad F_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i}$$

Otrzymaliśmy równanie Newtona dla sił potencjalnych – nasza modyfikacja jest zatem poprawna.

Funkcja Lagrange'a układu wielu cząstek (uogólnienie)

$$L = \sum_{a=1}^N T_a - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} \dot{\vec{r}}_a^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ - jest sumą energii potencjalnych cząstek

Uwaga:

- $U(\dots)$ opisuje nie tylko oddziaływania cząstek z polami zewnętrznymi (zależne od położenia pojedynczych cząstek), np.

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) = U(\vec{r}_1) + U(\vec{r}_2) + \dots$$

- ale również oddziaływania międzycząsteczkowe (zależne od aktualnego położenia dwóch lub więcej cząstek), np.

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) = \sum_{a=1}^N \sum_{b>a}^N U(\vec{r}_a, \vec{r}_b) + \sum_{a=1}^N \sum_{b>a}^N \sum_{c>a,b}^N U(\vec{r}_a, \vec{r}_b, \vec{r}_c) + \dots$$

(znak „>” w sumowaniu oznacza że każde oddziaływanie uwzględniamy tylko raz)

Transformacja ze współrzędnych kartezjańskich do współrzędnych uogólnionych

Konstruując funkcję L często (przynajmniej na początku) będziemy ją zapisywać we współrzędnych kartezjańskich - część kinetyczna ma wówczas prostą postać

$$T = \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{m_a}{2} \dot{x}_{a,i}^2$$

ale ze względu na symetrię przestrzenną potencjału, preferowany jest inny układ współrzędnych. To wymaga transformacji części kinetycznej T.

Dla ułatwienia użyjmy oznaczeń $x_{a,i} = x_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, 3N$

$$T = \sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{m_\alpha}{2} \dot{x}_\alpha^2$$

i wyrażmy współrzędne kartezjańskie we współrzędnych uogólnionych

$$x_\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_f)$$

$$\dot{x}_\alpha = \sum_{\beta=1}^f \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta$$

wstawmy to wyrażenie do równania opisującego T.

$$T = \sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{m_{\alpha}}{2} \left(\sum_{\beta=1}^f \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} \dot{q}_{\beta} \right)^2 = \sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{m_{\alpha}}{2} \sum_{\beta=1}^f \sum_{\beta'=1}^f \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_{\beta'}} \dot{q}_{\beta} \dot{q}_{\beta'} = \sum_{\beta=1}^f \sum_{\beta'=1}^f t_{\beta,\beta'} \dot{q}_{\beta} \dot{q}_{\beta'}$$

$$t_{\beta,\beta'} = \sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{m_{\alpha}}{2} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_{\beta'}}$$

Powyższe wzory definiują transformację energii kinetycznej przy przejściu do innego układu zmiennych.

Zauważmy, że energia kinetyczna jest formą kwadratową prędkości uogólnionych, dla których współczynniki multiplikatywne są funkcjami współrzędnych uogólnionych.

Ogólny przepis na transformację części kinetycznej funkcji Lagrange'a, mimo iż słuszny, rzadko jest stosowany w praktyce.

Dzięki rozważaniom geometrycznym, bardzo łatwo możemy zapisać T dla najczęściej stosowanych współrzędnych krzywoliniowych: cylindrycznych i sferycznych.

Zanim to jednak uczynimy – prześledźmy szczegółowo transformację T do układu cylindrycznego.

Funkcja Lagrange'a cząstki swobodnej we współrzędnych cylindrycznych

Zapiszmy energię kinetyczną we współrzędnych kartezjańskich

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

i wyrażmy wsp. kartezjańskie (x,y,z) za pomocą nowych zmiennych (ρ, φ, z)

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

Liczmy ich pochodne czasowe

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi$$

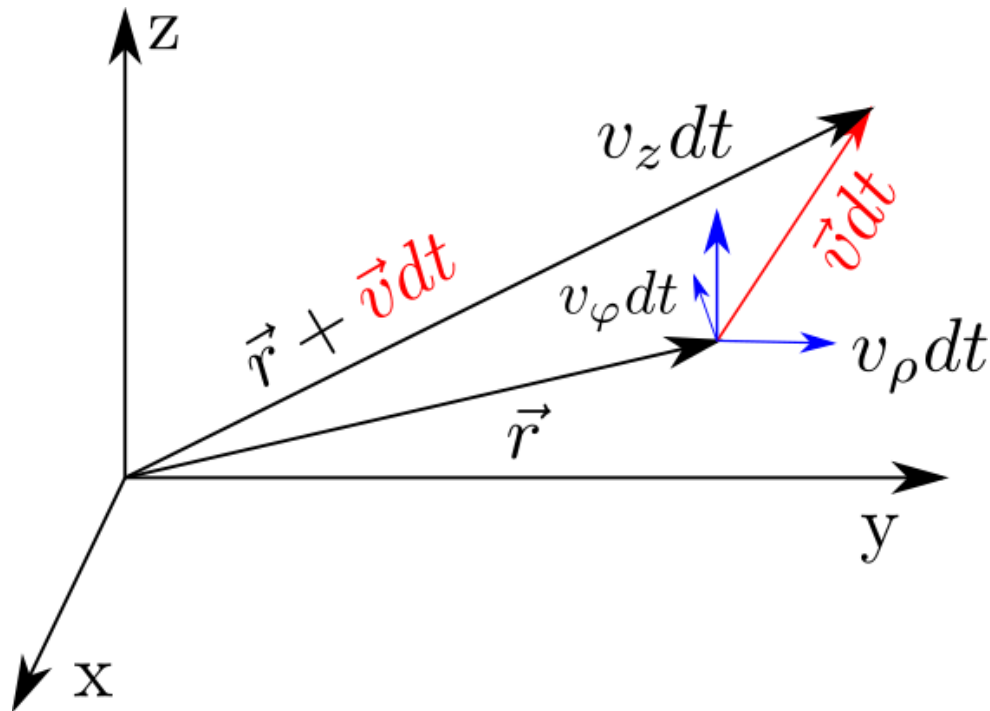
$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi$$

i wstawiamy do T

$$T = \frac{m}{2} \left(\begin{aligned} &\dot{\rho}^2 \cos^2 \varphi - \cancel{2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi} + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \\ &+ \dot{\rho}^2 \sin^2 \varphi + \cancel{2\rho \dot{\rho} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi} + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \dot{z}^2 \end{aligned} \right)$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

Interpretacja geometryczna wektora prędkości we współrzędnych cylindrycznych



Szukamy składowych v wzdłuż 3 ortogonalnych kierunków

$$\vec{v} = \hat{e}_\rho v_\rho + \hat{e}_\varphi v_\varphi + \hat{e}_z v_z$$

$$v_\rho = \dot{\rho}$$

$$v_\varphi = \rho \dot{\varphi}$$

$$v_z = \dot{z}$$

$$v^2 = v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$

Jak można inaczej określić prędkość we współrzędnych cylindrycznych?

Zapiszmy wektor wodzący w tych współrzędnych (wkłady dają tylko kierunki \hat{e}_ρ i \hat{e}_z)

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z$$

zróżniczkujmy go względem czasu

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z} \hat{e}_z \quad - \text{pamiętajmy, że układ cylindryczny obraca się wraz ze zmianą wektora wodzącego w czasie}$$

Wyraźmy jeszcze wersory ukł. cylindrycznego poprzez wersory kartezjańskie (wyznaczają one stałe w czasie kierunki)

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_\rho &= \hat{e}_x (-\sin \varphi) \dot{\varphi} + \hat{e}_y \cos \varphi \dot{\varphi} \\ &= \dot{\varphi} (-\hat{e}_x \sin \varphi + \hat{e}_y \cos \varphi) \\ &= \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \end{aligned}$$

macierz obrotu (ortogonalna)

$$O^{-1} O = I$$

$$O^T O = I$$

$$O^{-1} = O^T$$

Po podstawieniu otrzymamy

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{e}_z$$

Współrzędne sferyczne

Analogicznie jak w poprzednim przypadku mogliśmy zapisać (x,y,z) jako funkcje zmiennych (r, φ, θ)

$$x = r \cos \varphi \sin \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

i liczyć pochodne względem czasu.

Składowe prędkości w nowym układzie współrzędnych otrzymamy szybciej stosując rozważania geometryczne

$$\vec{r} = r \hat{e}_r$$

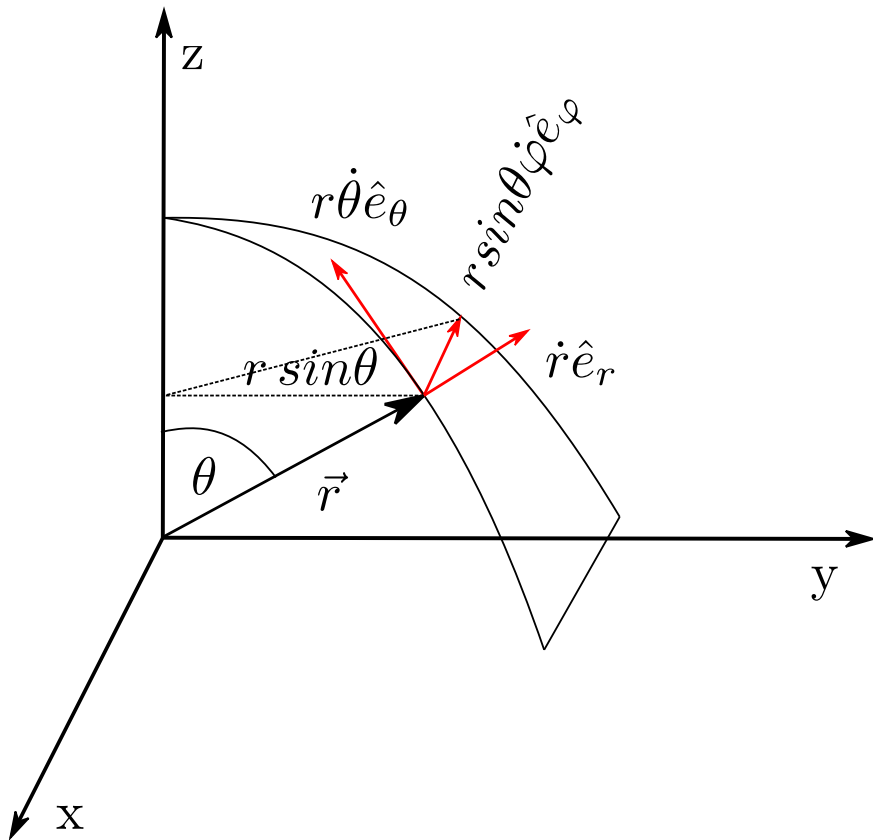
$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = v_r \hat{e}_r + v_\varphi \hat{e}_\varphi + v_\theta \hat{e}_\theta$$

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi}$$

$$v_\theta = r \dot{\theta}$$

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 r^2 \right)$$



Przykłady zastosowań formalizmu Lagrange'a

P1. Cząstka w polu centralnego potencjału.

O wyborze układu współrzędnych zazwyczaj decyduje postać potencjału, który oddziałuje na cząstkę i pojawia się w L . Przykładem układu, w którym cząstka porusza się w polu potencjału o symetrii sferycznej może być ruch planety wokół gwiazdy (jeśli zaniedbamy zaburzenie ruchu gwiazdy przez planetę) Potencjał możemy zapisać w postaci

$$U(\vec{r}) = U(|\vec{r}|) = U(r)$$

Lagranżjan we współrzędnych sferycznych

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 r^2 \right) - U(r)$$

Korzystamy równań Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \dot{\varphi} r^2 \sin^2 \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m \left(\dot{\varphi}^2 r \sin^2 \theta + r \dot{\theta}^2 \right) - \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m \dot{\varphi}^2 r^2 \cos \theta \sin \theta$$

Po wstawieniu pochodnych do równania Lagrange'a otrzymujemy równania ruchu

$$m\ddot{r} - m \left(\dot{\varphi}^2 r \sin^2 \theta + r \dot{\theta}^2 \right) + \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

$$m r^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi} + 2 m r \sin^2 \theta \dot{r} \dot{\varphi} + 2 m r^2 \cos \theta \sin \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0$$

$$m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{\theta} \dot{r} - m r^2 \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta = 0$$

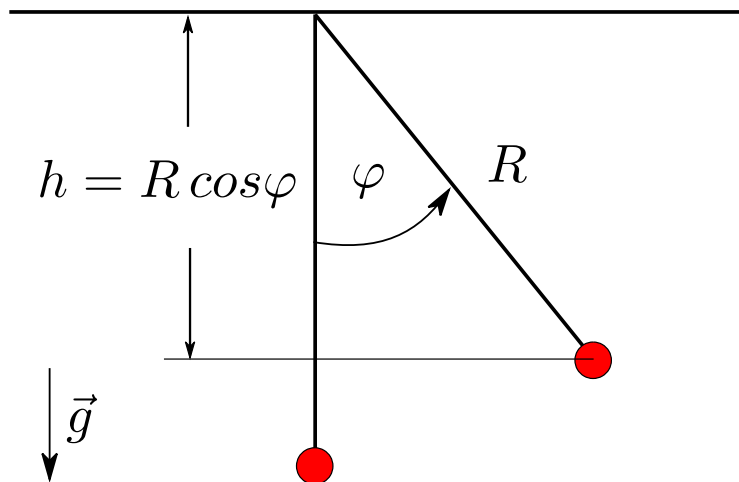
- równania ruchu stanowią układ trzech równań różniczkowych drugiego rzędu względem czasu
- ma on dość skomplikowaną postać, a jego rozwiązanie można znaleźć po wyspecyfikowaniu potencjału
- bardzo rzadko można znaleźć rozwiązanie analityczne, w przeciwnym wypadku pozostaje rachunek numeryczny

P2. Wahadło matematyczne.

Rozważmy bardzo prosty układ i porównajmy sposób otrzymywania równań stosując bezpośrednio zasady dynamiki Newtona (rozważamy siły działające w układzie) oraz podejście Lagrange'a (bazujemy na energii kinetycznej i potencjalnej)

Rozwiązanie problemu przy użyciu funkcji Lagrange'a.

- wahadło drga w płaszczyźnie, długość nieważkiej nici jest stała
- wybieramy biegunowy układ współrzędnych jako współrzędne uogólnione
- we współrzędnych uogólnionych jest tylko jedna zmienna niezależna (φ)
- jako poziom odniesienia (zero potencjału) wybieramy punkt zawieszenia



$$T = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = U(\varphi) = -m g R \cos \varphi$$

$$L = T - U = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 + m g R \cos \varphi$$

Z równania Lagrange'a dostajemy rów. ruchu

$$m R^2 \ddot{\varphi} + m g R \sin \varphi = 0$$

i ostatecznie

$$R \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$$

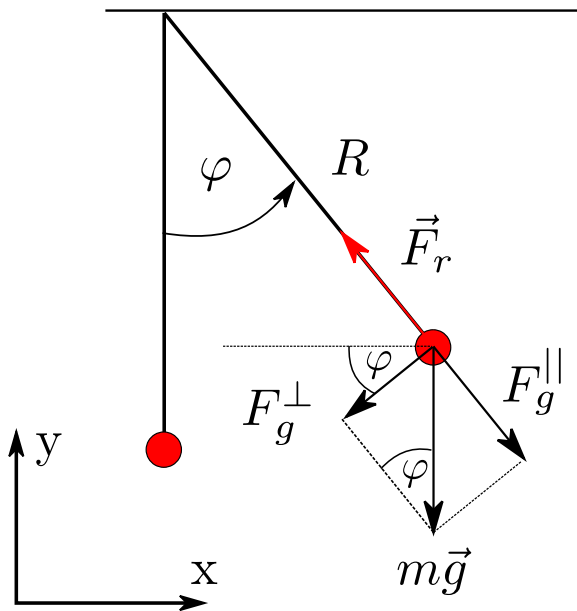
(nieliniowe rów. różniczkowe 2 rzędu)

Teraz podejście Newtona.

Zapisać równanie ruchu w najogólniejszej postaci (dwa wymiary)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_r$$

zawiera ono siłę grawitacji oraz F_r - siłę reakcji więzów (naciąg nici)



Z rysunku możemy wywnioskować o wielkości składowej siły grawitacji prostopadłej do nici

$$F_g^\perp = m g \sin\varphi$$

Składowe siły w układzie kartezjańskim

$$m\ddot{x} = -m g \sin\varphi \cos\varphi$$

$$m\ddot{y} = -m g \sin^2\varphi$$

Dokonyjemy transformacji zmiennych:
kartezjańskie \rightarrow uogólnione (biegunowe)

$$x = R \cos\varphi$$

$$y = R \sin\varphi$$

$$\dot{x} = -R \dot{\varphi} \sin\varphi$$

$$\dot{y} = R \dot{\varphi} \cos\varphi$$

Liczmy drugie pochodne

$$\ddot{x} = R \ddot{\varphi} \cos\varphi - R \dot{\varphi}^2 \sin\varphi$$

$$\ddot{y} = -R \ddot{\varphi} \sin\varphi - R \dot{\varphi}^2 \cos\varphi$$

które wstawiamy do równań ruchu

$$\begin{aligned} m (R \ddot{\varphi} \cos\varphi - R \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) &= -m g \sin\varphi \cos\varphi, & / \cdot \cos\varphi \\ (+) \quad m (R \ddot{\varphi} \sin\varphi + R \dot{\varphi}^2 \cos\varphi) &= -m g \sin^2\varphi & / \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

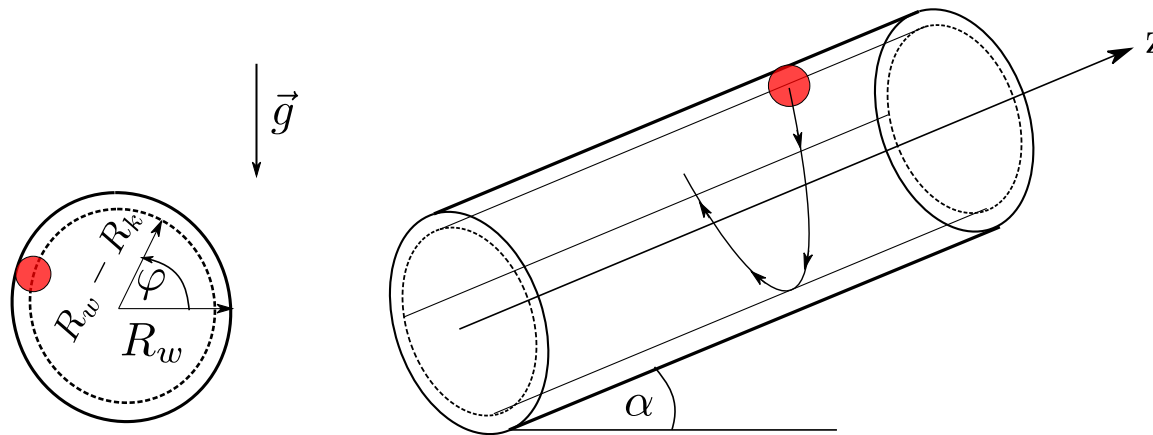
$$R \ddot{\varphi} = -g \sin\varphi$$

Czyli uzyskaliśmy to samo równanie ruchu.

Co było problemem? -> konieczność wyznaczenia drugich pochodnych

P3. Opis ruchu bryły sztywnej przy użyciu formalizmu Lagrange'a

Kulka o promieniu r może się poruszać bez poślizgu po wewnętrznej stronie walca o promieniu R . Oś walca jest nachylona pod kątem α do osi poziomej. Układ znajduje się w polu grawitacyjnym.



Rozważania rozpoczniemy od zdefiniowania współrzędnych uogólnionych.

Najwygodniejsze \rightarrow walcowe.

Ze względu na równanie więzów

$$f(\vec{r}) = \rho - (R_w - R_k) = 0$$

układ ma dwa stopnie swobody

$$(\varphi, z)$$

więc funkcja Lagrange'a będzie miała ogólną postać

$$L = T(\varphi, z, \dot{\varphi}, \dot{z}) - U(\varphi, z)$$

$$L = T(\varphi, z, \dot{\varphi}, \dot{z}) - U(\varphi, z)$$

Energia kinetyczna:

$$T = \frac{I \omega^2}{2} + \frac{m v^2}{2}$$

moment bezwładności kulki

$$I = \frac{2}{5} m R_k^2$$

jest sumą energii kinetycznej **ruchu postępowego** i **obrotowego** kulki.

Ruch postępowy jest złożeniem ruchu w kierunku „z” oraz ruchu kulki po poboczniczy (zmiana kąta)

$$\vec{v} = v_\phi \hat{e}_\phi + v_z \hat{e}_z$$

$$v_\phi = (R_w - R_k) \dot{\varphi}$$

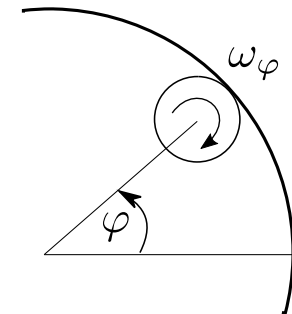
$$v_z = \dot{z}$$

Analogicznie znajdujemy **składowe prędkości obrotowej** (ω) pamiętając, że kulka toczy się bez poślizgu

$$\omega_z \cdot R_k = \dot{z}$$

$$\omega_\phi \cdot R_k = R_w \dot{\varphi} \quad \text{- liczymy w miejscu stykania się kulki ze ścianką walca}$$

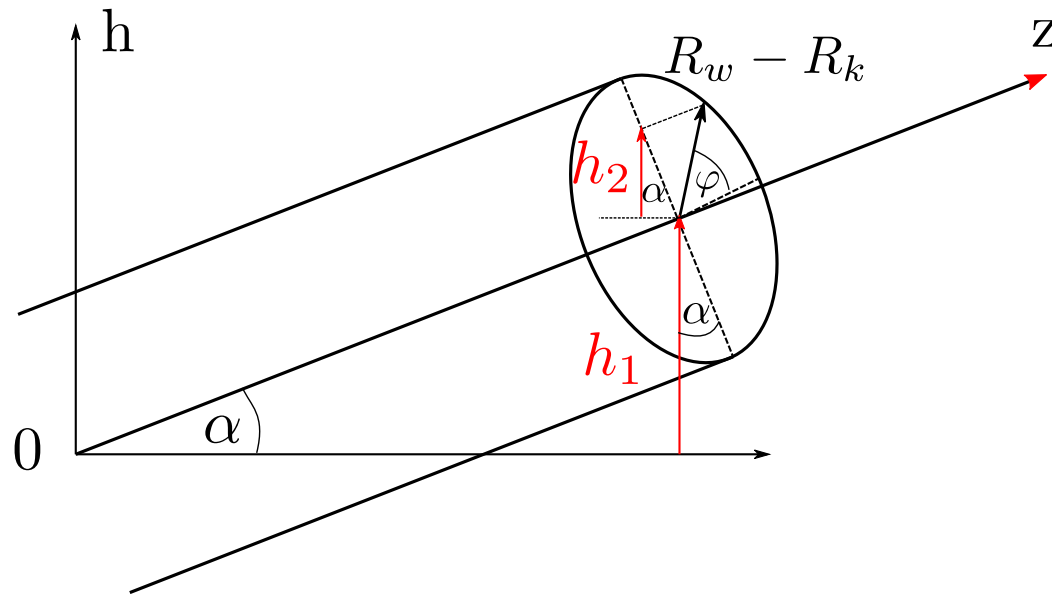
Uwaga: ciało porusza się w kierunku prostopadłym do osi „z” z prędkością kątową $\dot{\varphi}$, dodatkowo ze względu na brak poślizgu kulka obraca się wokół własnej osi z prędkością obrotową ω



Energia kinetyczna kulki

$$T = \frac{m}{2} (\dot{z}^2 + (R_w - R_k)^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{5} m R_k^2 \left[\left(\frac{R_w}{R_k} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{z}^2}{R_k^2} \right]$$

Energia potencjalna



Zapiszmy ją w ogólnej postaci

$$U = m g h$$

Z rysunku odczytujemy

$$h = h_1 + h_2$$

$$h_1 = z \cdot \sin \alpha$$

$$h_2 = (R_w - R_k) \sin \varphi \cos \alpha$$

$$U = m g [z \sin \alpha + (R_w - R_k) \sin \varphi \cos \alpha]$$

Funkcja Lagrange'a

$$L = T - U = \frac{7}{10} m \dot{z}^2 + m \left(\frac{R_w^2}{5} + \frac{(R_w - R_k)^2}{2} \right) \dot{\varphi}^2 - m g (z \sin \alpha + (R_w - R_k) \sin \varphi \cos \alpha)$$

$$L = \frac{7}{10}m \dot{z}^2 + m \left(\frac{R_w^2}{5} + \frac{(R_w - R_k)^2}{2} \right) \dot{\varphi}^2 - m g (z \sin\alpha + (R_w - R_k) \sin\varphi \cos\alpha)$$

Liczmy pochodne

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{7m}{5} \dot{z} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \left(\frac{2R_w^2}{5} + (R_w - R_k)^2 \right) \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -m g \sin\alpha \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m g (R_w - R_k) \cos\varphi \cos\alpha$$

z których dostajemy równania ruchu

$$\frac{7m}{2} \ddot{z} + m g \sin\alpha = 0$$

$$m \left(\frac{2R_w^2}{5} + (R_w - R_k)^2 \right) \ddot{\varphi} + m g (R_w - R_k) \cos\varphi \cos\alpha = 0$$

- jest to układ dwóch równań niezależnych, czyli uzyskaliśmy separację zmiennych
- ruch ciała wzdłuż osi walca i po okręgu możemy zatem opisywać niezależnie
- możliwość separacji zmiennych pojawia się wówczas, gdy T i U są sumą wyrazów zależnych tylko od jednej zmiennej