Własności fali EM na granicy ośrodków

Plan wykładu

- fale EM w ośrodkach liniowych jednorodnych (przypomnienie)

- przejście fali EM przez granicę ośrodków:
    - fala padająca prostopadle na intefejs
    - fala padająca ukośnie na interfejs

- absorpcja fali EM w przewodniku

- odbicie fali EM od powierzchnii przewodnika

Fale EM w ośrodkach liniowych jednorodnych

- rozważamy sytuację, w której fale EM przemieszczają się w ośrodku liniowym i jednorodnym

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

- biorąc pod uwagę powyższe zależności oraz brak ładunków swobodnych i prądów, równania Maxwella przyjmują w ośrodku materialnym następującą postać

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

- z ostatniego równania wyciągamy informację dotyczącą prędkości przemieszczającej się fali

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}$$

μ, ε – przenikalności względne ośrodka

$$\boxed{n = \sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- „nowa” wielkość charakteryzująca ośrodek, współczynnik załamania

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon}$$ - współczynnik załamania ośrodka

- fala przemieszczająca się w ośrodku ma prędkość mniejszą niż w próżni

- jak zachowują się wektory pola EM gdy fala przechodzi przez granicę dwóch ośrodków?

musimy pamiętać, że na granicy ośrodków spełnione muszą być określone relacje pomiędzy składowymi wektorów pola

$$\varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp} \qquad B_1^{\perp} = B_2^{\perp}$$

$$\vec{E}_1^{||} = \vec{E}_2^{||} \qquad \vec{H}_1^{||} = \vec{H}_2^{||} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1^{||} = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2^{||}$$

Uwaga 1: aby uprościć zapis i rachunki użyjemy liczb zespolonych

$$\widetilde{E} = Re\{\widetilde{E}\} + Im\{\widetilde{E}\}$$

$$\widetilde{B} = Re\{\widetilde{B}\} + Im\{\widetilde{B}\}$$

- znaczenie fizyczne ma część rzeczywista
  (na razie – w przypadku absorpcji również urojona)

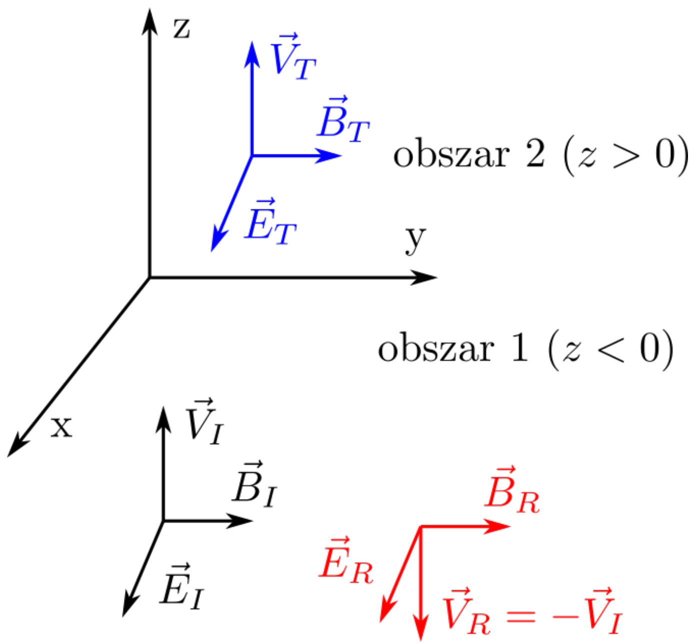
Uwaga 2: pogrubiona czciona oznacza wielkość wektorową

$$\widetilde{\vec{E}} = \widetilde{\boldsymbol{E}} \qquad \widetilde{\vec{B}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}$$

Fala EM padająca prostopadle na granicę ośrodków

Założenia:

- fala porusza się wzdłuż osi „z”
- fala spolaryzowana wzdłuż kierunku „x”
- z<0 – obszar 1
  z>0 – obszar 2
  z=0 – granica ośrodków (interfejs)



Oznaczenia:

I – fala padająca (incident)
R – fala odbita (reflected)
T – fala przechodząca (transmitted)

- dla każdej składowej możemy zapisać odpowiednie rozwiązanie – ich superpozycja stanowi rozwiązanie ogólne (używamy zapisu zespolonego, znaczenie fizyczne ma część rzeczywista)

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_I(z,t) = \widetilde{E}_{0,I} e^{i(k_1 z - \omega\, t)} \widehat{e}_x$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_I(z,t) = \frac{1}{v_1} \widetilde{E}_{0,I} e^{i(k_1 z - \omega\, t)} \widehat{e}_y$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_R(z,t) = \widetilde{E}_{0,R} e^{i(-k_1 z - \omega\, t)} \widehat{e}_x$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_R(z,t) = -\frac{1}{v_1} \widetilde{E}_{0,R} e^{i(-k_1 z - \omega\, t)} \widehat{e}_y$$

- odwrócony kierunek k

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_T(z,t) = \widetilde{E}_{0,T} e^{i(k_2 z - \omega\, t)} \widehat{e}_x$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_T(z,t) = \frac{1}{v_2} \widetilde{E}_{0,T} e^{i(k_2 z - \omega\, t)} \widehat{e}_y$$

Na granicy ośrodków z=0 składowe pól muszą być ciągłe (brak ładunków i prądów swobodnych)

- ciągłość składowych prostopadłych

$$\varepsilon_1 \left(\widetilde{E}_I^{\perp} + \widetilde{E}_R^{\perp} \right) = \varepsilon_2 \widetilde{E}_T^{\perp}$$

$$\widetilde{B}_I^{\perp} + \widetilde{B}_R^{\perp} = \widetilde{B}_T^{\perp}$$

- brak składowych prostopadłych do interfejsu (tymi równaniami się nie przejmujemy)

- ciągłość składowych równoległych do interfejsu

$$\vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel} \quad \rightarrow \quad \widetilde{E}_{0,I} + \widetilde{E}_{0,R} = \widetilde{E}_{0,T}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^{\parallel} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{1}{v_1} \widetilde{E}_{0,I} - \frac{1}{v_1} \widetilde{E}_{0,R} \right) = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{1}{v_2} \widetilde{E}_{0,T} \right)$$

- po odbiciu zmieniliśmy zwrot wektora prędkości oraz wektora **B**

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{v} \hat{\boldsymbol{k}} \times \widetilde{\boldsymbol{E}}$$

mamy 2 równania i 2 niewiadome (E_I znamy, więc zostają E_R i E_T),

$$\widetilde{E}_{0,R} + \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} \widetilde{E}_{0,T} = \widetilde{E}_{0,I}$$

$$-\widetilde{E}_{0,R} + \widetilde{E}_{0,T} = \widetilde{E}_{0,I}$$

$$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}$$

Rozwiązaniem są **amplitudy zespolone**

$$\widetilde{E}_{0,R} = \frac{1-\beta}{1+\beta}\widetilde{E}_{0,I}$$

$$\widetilde{E}_{0,T} = \frac{2}{1+\beta}\widetilde{E}_{0,I}$$

w ośrodkach niemagnetycznych, przenikalność μ jest podobna jak w próżni, możemy uprościć wyrażenie

$$1 \pm \beta = 1 \pm \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = 1 \pm \frac{\mu_1 \frac{c}{n_1}}{\mu_2 \frac{c}{n_2}} \approx 1 \pm \frac{n_2}{n_1}, \qquad (\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1)$$

Uwzględniając powyższą zależność oraz fakt iż $E_{0R}<E_{0I}$,
możemy określić **części rzeczywiste amplitud**

$$E_{0R} = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right| E_{0I}$$

$$E_{0T} = \left|\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right| E_{0I}$$

- mimo iż fala pada prostopadle na interfejs, część fali ulegnie odbiciu – jeśli ośrodki mają różne współczynniki załamania

Jaka część fali EM zostanie odbita gdy pada prostopadle na interfejs?

- wykorzystujemy wektor Poytinga dla fali monochromatycznej

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$\vec{E}(z,t) = E_0\cos(kz-\omega\, t)\widehat{e}_x$$

$$\vec{B}(z,t) = B_0\cos(kz-\omega\, t)\widehat{e}_y$$

$$B_0 = \frac{E_0}{v}$$

do policzenia natężenia fali - ilość energii przechodzącej przez powierzchnię jednostkową w ciągu 1 sekundy

$$\boxed{I = \langle|\vec{S}|\rangle_t}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- okres drgań monochromatycznej fali EM

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_0^2}{v\mu\mu_0}\cos^2(kz-\omega\, t)dt$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 v E_0^2 \qquad \left[\frac{W}{m^2}\right]}$$

- definiujemy **współczynnik odbicia** jako stosunek natężenia fali odbitej do padającej

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{0R}}{E_{0I}}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

i analogicznie **współczynnik transmisji**

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\varepsilon_2 v_2}{\varepsilon_1 v_1}\left(\frac{E_{0T}}{E_{0I}}\right)^2 = \left(\frac{4n_1 n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

- oba współczynniki są unormowane do 1 – ze względu na zasadę zachowania energii

$$R + T = 1$$

- dla interfejsu próżnia-szkło współczynniki R i T wynoszą

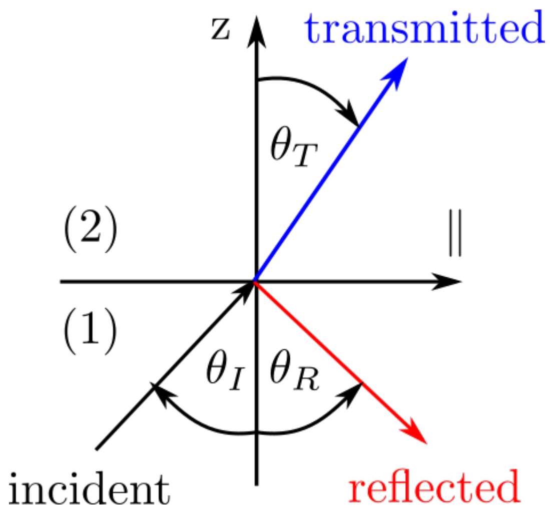
$$n_1 = 1, \qquad n_2 = 1.5$$

$$R = 0.04, \qquad T = 0.96$$

większość promieniowania przechodzi, ale część ulega odbiciu

Fala padająca ukośnie na granicę ośrodków

- monochromatyczna fala EM pada pod kątem na granicę ośrodków, jaka jest zależność współczynników R i T od kąta padania?



rozwiązanie proponujemy w postaci sumy trzech składników I, R, T

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_I(\vec{r},t) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_{0,I} e^{i(\vec{k}_I \vec{r} - \omega\, t)}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{B}}_I(\vec{r},t) = \frac{\widehat{\boldsymbol{k}}_I \times \widetilde{\boldsymbol{E}}_I}{v_1}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_R(\vec{r},t) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_{0,R} e^{i(\vec{k}_R \vec{r} - \omega\, t)}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{B}}_R(\vec{r},t) = \frac{\widehat{\boldsymbol{k}}_R \times \widetilde{\boldsymbol{E}}_R}{v_1}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_T(\vec{r},t) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_{0,T} e^{i(\vec{k}_T \vec{r} - \omega\, t)}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{B}}_T(\vec{r},t) = \frac{\widehat{\boldsymbol{k}}_T \times \widetilde{\boldsymbol{E}}_T}{v_2}$$

- częstość fali EM nie ulega zmianie podczas odbicia, dostajemy więc warunek

$$\omega = k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2, \qquad (\omega = kc)$$

$$k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T$$

- wprowadzamy warunki brzegowe

$$\varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp} \qquad\qquad B_1^{\perp} = B_2^{\perp}$$

$$\vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel} \qquad\qquad \vec{B}_1^{\parallel} = \vec{B}_2^{\parallel}, \qquad (\mu_1 \approx \mu_2)$$

muszą być spełnione na interfejsie (z=0) w dowolnej chwili czasowej,
zapiszmy je w postaci bardziej ogólnej (C to dowolna składowa εE lub B)

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_I^{\perp,\parallel} e^{i(\vec{k}_I\vec{r}-\omega\,t)} + \widetilde{\boldsymbol{C}}_R^{\perp,\parallel} e^{i(\vec{k}_R\vec{r}-\omega\,t)} = \widetilde{\boldsymbol{C}}_T^{\perp,\parallel} e^{i(\vec{k}_T\vec{r}-\omega\,t)}, \qquad z=0, \quad t,x,y \text{ - dowolne}$$

co prowadzi do wniosku, że czynniki fazowe muszą być identyczne

$$\vec{k}_I\vec{r} = \vec{k}_R\vec{r} = \vec{k}_T\vec{r}, \qquad z=0$$

$$k_{I,x}x + k_{I,y}y = k_{R,x}x + k_{R,y}y = k_{T,x}x + k_{T,y}y$$

a rozwiązania dla kierunków „x” i „y” muszą się separować,
bo nie mogą zależeć od wyboru układu współrzędnych

$$\boxed{\begin{aligned} k_{I,x} &= k_{R,x} = k_{T,x} \\ k_{I,y} &= k_{R,y} = k_{T,y} \end{aligned}} \Rightarrow$$

wniosek (1):
wektory falowe fali padającej, odbitej i przechodzącej leżą w jednej płaszczyźnie (płaszczyzna padania)

- rozwiązania dla kierunków „x” i „y” muszą się separować, bo nie mogą zależeć od wyboru układu współrzędnych

$$k_{I,x}x + k_{I,y}y = k_{R,x}x + k_{R,y}y = k_{T,x}x + k_{T,y}y$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_{I,x} = k_{R,x} = k_{T,x} \\ k_{I,y} = k_{R,y} = k_{T,y} \end{aligned}}$$

wniosek (1):
wektory falowe fali padającej, odbitej i przechodzącej leżą w jednej płaszczyźnie (płaszczyzna padania)

- relację dla części przestrzennej

$$\vec{k}_I\vec{r} = \vec{k}_R\vec{r} = \vec{k}_T\vec{r}, \qquad z = 0$$

możemy zapisać dla składowej równoległej wykorzystując jawną zależność kątową

$$k_I \sin\theta_I = k_R \sin\theta_R = k_T \sin\theta_T$$

$$\boxed{k_I = k_R \quad \rightarrow \quad \theta_I = \theta_R}$$

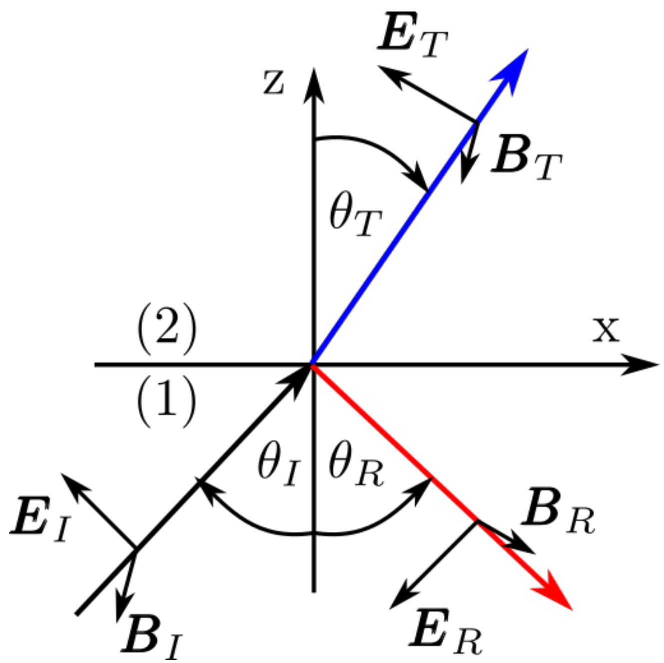
wniosek (2):
kąty padania i odbicia są identyczne (prawo odbicia)

$$k_I \sin\theta_I = k_T \sin\theta_T$$

$$\boxed{\frac{k_I}{k_T} = \frac{\omega}{v_1}\frac{v_2}{\omega} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\theta_T}{\sin\theta_I}}$$

wniosek (3):
otrzymaliśmy prawo załamania (Snella)

Fala spolaryzowana w płaszczyźnie padania



Wektor polaryzacji fali EM leży w płaszczyźnie xz

$$\boldsymbol{E}_I,\ \boldsymbol{E}_R,\ \boldsymbol{E}_T \| \text{ x-z plane}$$

wektory B są równoległe do osi y

$$\boldsymbol{B}_I,\ \boldsymbol{B}_R,\ \boldsymbol{B}_T \| \text{ y-axis}$$

- zapisujemy warunki brzegowe dla z=0 tylko dla amplitud, ponieważ ustaliliśmy że czynniki fazowe są identyczne

składowe prostopadłe

$$\varepsilon_1 \left(\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0I} + \widetilde{\boldsymbol{E}}_{0R}\right)_z = \varepsilon_2 \left(\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0T}\right)_z$$

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{0I} + \widetilde{\boldsymbol{B}}_{0R}\right)_z = \left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{0T}\right)_z$$

składowe równoległe

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0I} + \widetilde{\boldsymbol{E}}_{0R}\right)_{x,y} = \left(\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0T}\right)_{x,y}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{0I} + \widetilde{\boldsymbol{B}}_{0R}\right)_{x,y} = \frac{1}{\mu_2} \left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{0T}\right)_{x,y}$$

$$\varepsilon_1\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0I}+\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0R}\right)_z=\varepsilon_2\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0T}\right)_z \longrightarrow \varepsilon_1\left(-\widetilde{E}_{0I}\sin\theta_I+\widetilde{E}_{0R}\sin\theta_R\right)=\varepsilon_2\left(-\widetilde{E}_{0T}\sin\theta_T\right)$$

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{0I}+\widetilde{\boldsymbol{B}}_{0R}\right)_z=\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{0T}\right)_z \longrightarrow$$ brak składowych w kierunku osi „z”

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0I}+\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0R}\right)_{x,y}=\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}_{0T}\right)_{x,y} \longrightarrow$$ składowa tylko w kierunku osi „x”

$$\widetilde{E}_{0I}\cos\theta_I+\widetilde{E}_{0R}\cos\theta_R=\widetilde{E}_{0T}\cos\theta_T$$

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{0I}+\widetilde{\boldsymbol{B}}_{0R}\right)_{x,y}=\frac{1}{\mu_2}\left(\widetilde{\boldsymbol{B}}_{0T}\right)_{x,y}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_0=\frac{1}{v}\widehat{\boldsymbol{k}}\times\widetilde{\boldsymbol{E}}_0$$

$$\frac{1}{\mu_1 v_1}\left(\widetilde{E}_{0I}-\widetilde{E}_{0R}\right)=\frac{1}{\mu_2 v_2}\widetilde{E}_{0T}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$\widetilde{E}_{0I}-\widetilde{E}_{0R}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\underbrace{\frac{\sin\theta_T}{\sin\theta_I}}_{=\frac{n_1}{n_2}}\widetilde{E}_T=\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\varepsilon_1\mu_1}\,\frac{n_1}{n_2}\widetilde{E}_T=\frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}\widetilde{E}_T=\frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}\widetilde{E}_T$$

ma ono identyczną postać jak ostatnie równanie

$$\boxed{\widetilde{E}_{0I}-\widetilde{E}_{0R}=\beta\widetilde{E}_T,\qquad \beta=\frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}}$$

oraz z trzeciego równania

$$\boxed{\widetilde{E}_{0I}+\widetilde{E}_{0R}=\alpha\widetilde{E}_T,\qquad \alpha=\frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I}}$$

- dostaliśmy układ równań, jego rozwiązanie opisują tzw. równania Fresnela

$$\widetilde{E}_{0I} - \widetilde{E}_{0R} = \beta \widetilde{E}_T, \qquad \beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

$$\widetilde{E}_{0I} + \widetilde{E}_{0R} = \alpha \widetilde{E}_T, \qquad \alpha = \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I}$$

$$\widetilde{E}_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \widetilde{E}_{0I}$$

$$\widetilde{E}_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} \widetilde{E}_{0I}$$

- relacja między współczynnikami α i β wpływa na amplitudę fali odbitej

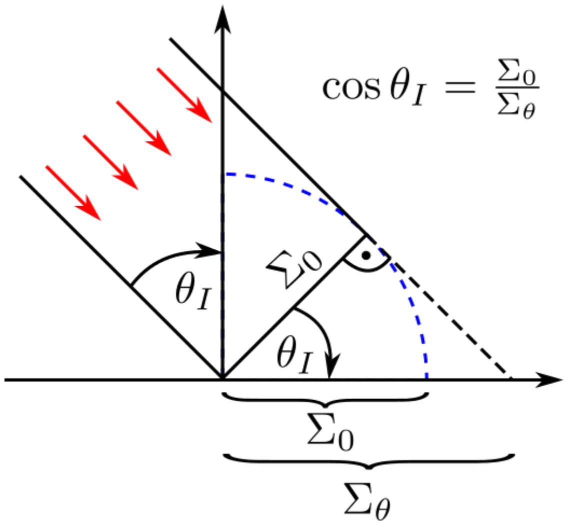
$$\alpha = \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\theta_T}}{\cos\theta_I} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_I\right)^2}}{\cos\theta_I}$$

$\theta_I = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = 1$ - fala EM padająca prostopadle na interfejs

$\theta_I = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = rozbieżne$ - całkowite odbicie fali padającej

$\alpha = \beta \quad \rightarrow \quad tg\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$ - całkowite wygaszenie fali odbitej dla kąta Brewstera θ_B

- wyznaczając natężenie fali padającej / przechodzącej należy uwzględnić kąt padania/przejścia



$$I = \langle \vec{S}\cdot\hat{e}_z\rangle_t = \langle S\rangle\cos\theta_I$$

$$I_I = \frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_0 v_1 E_{0I}^2\cos\theta_I$$ - fala padająca

$$I_R = \frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_0 v_1 E_{0R}^2\cos\theta_R$$ - fala odbita

$$I_T = \frac{1}{2}\varepsilon_2\varepsilon_0 v_2 E_{0T}^2\cos\theta_T$$ - fala przechodząca

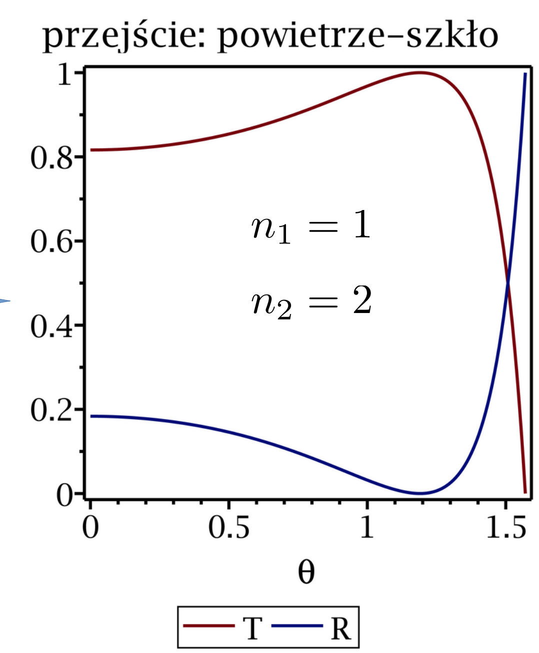
- współczynnik odbicia

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \frac{E_{0R}^2}{E_{0I}^2} = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2$$

- współczynnik transmisji

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\varepsilon_2 v_2 E_{0T}^2\cos\theta_T}{\varepsilon_1 v_1 E_{0I}^2\cos\theta_I} = \alpha\beta\left(\frac{2}{\alpha+\beta}\right)^2$$

przykład



Absorpcja fali EM w przewodniku

Wektor elektryczny fali EM padającej na powierzchnię przewodnika powoduje przepływ ładunku swobodnego w jego wnętrzu. Relację między wektorami E i J określa mikroskopowe prawo Ohma

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

σ – przewodnictwo właściwe ośrodka

Pod jego wypływem indukuje się ładunek swobodny, którego wielkość określa jedno z równań Maxwella

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

spełnione musi być także równanie ciągłości

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \sigma \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

otrzymaliśmy równanie opisujące dynamikę zmian ładunku swobodnego

$$\frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \rightarrow \qquad \rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} t} = \rho(0) e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \rightarrow \qquad \tau = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} >> \frac{1}{\omega}$$

w wyniku przepływu prądu w kierunku brzegu ładunek swobodny (nieskompensowany) znika po ~10τ

- z równania ciągłości wynika, że po dość długim czasie (10τ) znika dywergencja J, prąd jednak nie znika ze względu na wymuszenie w postaci fali EM

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0, \quad \boldsymbol{J} \neq 0$$

i czynnik ten modyfikuje nadal jedno z równań Maxwella

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$ - ładunek swobodny przepłynął na brzeg

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu\mu_0\sigma\boldsymbol{E}$$ - wymuszony przepływ prądu

działając operatorem rotacji na dwa ostatnie równania otrzymamy zmodyfikowane równania falowe dla E i B

$$\underbrace{\nabla^2 \vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}}_{równanie\, falowe} + \underbrace{\mu\mu_0\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}}_{dyssypacja}$$

$$\underbrace{\nabla^2 \vec{B} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}}_{równanie\, falowe} + \underbrace{\mu\mu_0\sigma \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}}_{dyssypacja}$$

- rozwiązanie obu równań możemy zaproponować w postaci fal płaskich z zespoloną liczbą falową (granica ośrodków ustwiona jest w z=0)

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \widetilde{\boldsymbol{E}}_0\, e^{i(\widetilde{k}z-\omega\, t)}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}(z,t) = \widetilde{\boldsymbol{B}}_0\, e^{i(\widetilde{k}z-\omega\, t)}$$

$$\widetilde{k} = k + i\,\kappa$$

część rzeczywista to zrenormalizowana liczba falowa

$$k = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

renormalizacja λ i n:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad n = \frac{v\,k}{\omega}$$

cześć urojona odpowiada za absorpcję fali EM wnikającej do wnętrza przewodnika

$$\kappa = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

jej odwrotność definiuje **efektywną głębokość wnikania fali EM do przewodnika**

$$\boxed{d = \frac{1}{\kappa}}$$

- na głębokości d amplituda fali maleje 1/e razy

- rozwiązania spełniają wszystkie równania Maxwella, ale spełnienie dwóch pierwszych oznacza, że znikają składowe podłużne (z-owe) wektorów E i B
  - niezerowe mogą być tylko składowe prostopadłe obu wektorów

- wybierzmy kierunek polaryzacji wzdłuż osi „x” i wstawmy do równania Maxwella

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z,t) = \widetilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(k\,z-\omega\,t)}\,\widehat{e}_x$$

$$\nabla \times \widetilde{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \longrightarrow \widetilde{\boldsymbol{B}}(z,t) = \frac{\widetilde{k}}{\omega}\widetilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(k\,z-\omega\,t)}\,\widehat{e}_y$$

$\widetilde{\boldsymbol{E}} \perp \widetilde{\boldsymbol{B}}$ - wnikająca do przewodnika fala EM nadal jest poprzeczna

- sprawdźmy jaka relacja łączy amplitudy obu wektorów

$$\widetilde{k} = k + i\kappa = K\,e^{i\phi} \qquad K = \sqrt{k^2+\kappa^2}, \qquad \phi = arc\,tg\left(\frac{\kappa}{k}\right)$$

$$\widetilde{B}_0 = B_0 e^{i\delta_B} = \frac{K\,e^{i\phi}}{\omega} E_0 e^{i\delta_E} \qquad \rightarrow \qquad \phi = \delta_B - \delta_E$$

wniosek:
tłumienie (absorpcja) fali EM w przewodniku powoduje powstanie przesunięcia fazowego między wektorami E i B

Odbicie fali EM od powierzchnii przewodnika

- fala Em padając na powierzchnię przewodnika musi tam spełniać warunki brzegowe, a te uwarunkowane są występowaniem ładunku i prądu powierzchniowego

$$\varepsilon_1 E_1^{\perp} - \varepsilon_2 E_2^{\perp} = \frac{\sigma_{sw}}{\varepsilon_0}$$

$$B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0$$

$$\boldsymbol{E}_1^{||} - \boldsymbol{E}_2^{||} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{B}_1^{||} - \frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{B}_2^{||} = \boldsymbol{J}_{sw} \times \hat{\boldsymbol{n}}$$

jeśli fala pada prostopadle na granicę próżnia (1)-przewodnik (2) w z=0
to nie indukuje ładunku swobodnego i prądu na powierzchnii przewodnika
(wektory E i B mają tylko składowe równoległe do interfejsu)

$$E_1^{\perp} = E_2^{\perp} \quad \rightarrow \quad \sigma_{sw} = 0, \quad \boldsymbol{J}_{sw} = 0 \qquad\qquad (\boldsymbol{J}_{sw} = \sigma_{sw}\boldsymbol{E}^{||})$$

interesują nas tylko dwa ostatnie równania, które redukują się do postaci

$$\boldsymbol{E}_1^{||} - \boldsymbol{E}_2^{||} = 0$$

$$\frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{B}_1^{||} - \frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{B}_2^{||} = 0$$

- rozważamy monochromatyczną falę EM spolaryzowaną w kierunku osi „x”, wiemy że jej część się odbija a część wnika do przewodnika, wykorzystamy znane rozwiązania w postaci ogólnej (zespolonej)

fala padająca (1)

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_I(z,t) = \widetilde{E}_{0I} e^{i(k_1 z - \omega t)}\,\widehat{e}_x$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_I(z,t) = \frac{\widetilde{E}_{0I}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)}\,\widehat{e}_y$$

fala odbita (1)

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_R(z,t) = \widetilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)}\,\widehat{e}_x$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_R(z,t) = \frac{\widetilde{E}_{0R}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)}\,\widehat{e}_y$$

fala wnikająca do (2)

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_T(z,t) = \widetilde{E}_{0T} e^{i(k_2 z - \omega t)}\,\widehat{e}_x$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_T(z,t) = \frac{\widetilde{E}_{0T}}{v_2} e^{i(k_2 z - \omega t)}\,\widehat{e}_y$$

muszą one spełniać równania Maxwella na granicy ośrodków 1-2 (z=0), interesują nas tylko składowe równoległe do interfejsu

$$\boldsymbol{E}_1^{\parallel} - \boldsymbol{E}_2^{\parallel} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \widetilde{E}_{0I} + \widetilde{E}_{0R} = \widetilde{E}_{0T}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{B}_2^{\parallel} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{\mu_1 v_1}\left(\widetilde{E}_{0I} - \widetilde{E}_{0R}\right) - \frac{\widetilde{k}_2}{\mu_2 \omega}\widetilde{E}_{0T} = 0$$

- zespolona liczba falowa

ponownie dostaliśmy układ dwóch równań liniowych, jego rozwiązaniem są dwie liczby zespolone

$$\widetilde{E}_{0R} = \frac{1-\widetilde{\beta}}{1+\widetilde{\beta}}\,\widetilde{E}_{0I} \qquad \widetilde{E}_{0T} = \frac{2}{1+\widetilde{\beta}}\,\widetilde{E}_{0I} \qquad \widetilde{\beta} = \frac{\mu_1 v_1 \widetilde{k}_2}{\mu_2 \omega}$$

- rozwiązanie układu (poprzednia strona)

$$\widetilde{E}_{0R} = \frac{1-\widetilde{\beta}}{1+\widetilde{\beta}}\,\widetilde{E}_{0I} \qquad \widetilde{E}_{0T} = \frac{2}{1+\widetilde{\beta}}\,\widetilde{E}_{0I} \qquad \widetilde{\beta} = \frac{\mu_1 v_1 \widetilde{k}_2}{\mu_2 \omega}$$

zależy od zespolonej wartości liczby falowej – ta zależy od przewodności σ ośrodka (2)

$$\widetilde{k} = k + i\,\kappa$$

$$k = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\kappa = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

- załóżmy, że dysponujemy idealnym przewodnikiem σ=∞, jakie będą amplitudy fali przechodzącej i odbitej?

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1-\widetilde{\beta}}{1+\widetilde{\beta}} = -1 \qquad \rightarrow \qquad \widetilde{E}_{0R} = -\widetilde{E}_{0I}$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{2}{1+\widetilde{\beta}} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \widetilde{E}_{0T} = 0$$

- fala EM odbija się, przy czym dochodzi do zmiany fazy na przeciwną
- czyste powierzchnie dobrych przewodników mają duży współczynnik odbicia, np. cienka warstwa srebra na tylnej części lustra
- głębokość wnikania fali EM na której dochodzi do odbicia wynosi ~100 angstremów