

W14. Elektrodynamika – źródła promieniowania elektromagnetycznego

Plan wykładu:

- promieniowanie elektryczne dipolowe
- pole E i B oraz moc promieniowania
- promieniowanie magnetyczne dipolowe

Wiemy że strumień energii unoszonej przez falę EM opisuje wektor Poyntinga

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

A moc jaka przechodzi przez powierzchnię zamkniętą (sferę) określa całka

$$P(r) = \oint \vec{S} \cdot d\vec{s}$$

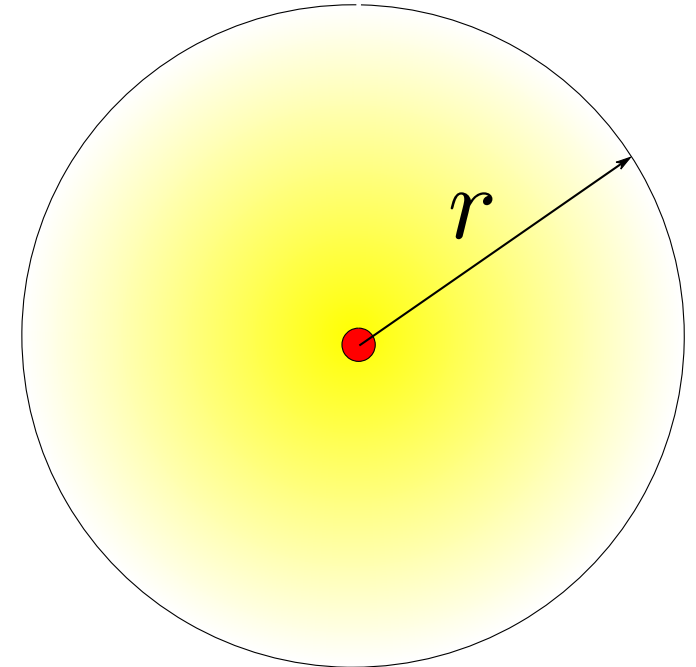
Dla statycznego rozkładu ładunku oraz dla dipola magnetycznego możemy zapisać

$$E \sim \frac{1}{r^2} \quad B \sim \frac{1}{r^2}$$

co daje moc $P(r)$ w dużej odległości od ładunku

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(r) \sim 4\pi r^2 \frac{1}{r^2} \frac{1}{r^2} = 0$$

czyli statyczny rozkład ładunku / dipol magnetyczny nie generują fal elektromagnetycznych.



Fale EM generują rozkłady ładunku elektrycznego/prądy zmienne w czasie.

Promieniowanie elektryczne dipolowe

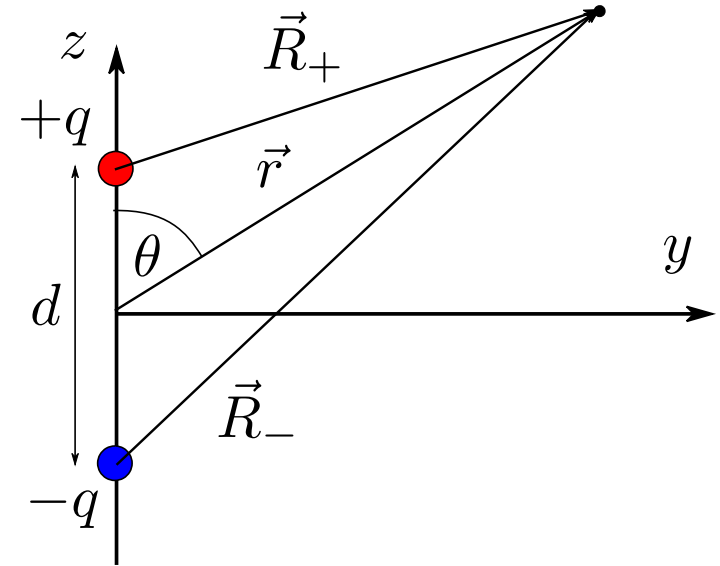
Założmy że ładunek oscyluje pomiędzy skrajnymi punktami z pewną stałą w czasie częstotliwością

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t)$$

Taki układ stanowi drgający dipol

$$\vec{p}(t) = q_0 d \cos(\omega t) \hat{e}_z$$

$$p_0 = q_0 d \quad - \text{wartość maksymalna momentu}$$



Interesuje nas potencjał skalarny i wektorowy wytwarzany przez dipol

$$\vec{E} = -\nabla V(\vec{r}) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

w dużej odległości od jego środka (bo tam znamy dobre przybliżenie potencjału)

$$r \gg d$$

Ponieważ rozkład ładunku w układzie jest zmienny w czasie musimy posłużyć się **potencjałami opóźnionymi**

Opóźniony potencjał skalarny

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0 \cos[\omega(t - \frac{R_+}{c})]}{R_+} - \frac{q_0 \cos[\omega(t - \frac{R_-}{c})]}{R_-} \right)$$

$$R_{\pm} = \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta + \frac{d^2}{4}} \begin{cases} \rightarrow R_{\pm} \approx r \left(1 \mp \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \\ \rightarrow \frac{1}{R_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R_{\pm}}{c} \right) \right] &\approx \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right] \\ &= \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \left(\frac{\omega d}{2c} \right) \mp \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

Zakładamy, że prędkość przemieszczania się ładunku jest „mała”

$$\omega d \ll c$$

$$\cos \left[\omega \left(t - \frac{R_{\pm}}{c} \right) \right] \approx \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \mp \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

Potencjał opóźniony przyjmuje postać

$$V(r, \theta, t) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ -\frac{\omega}{c} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{1}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}$$

dla przypadku statycznego

$$\omega = 0$$

odtworzamy znany wzór

$$V(r, \theta) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

W dużych odległościach od dipola

$$\omega r \gg c$$

drugi wyraz w $\{$ maleje znacznie szybciej od pierwszego, wobec czego mamy

$$V(r, \theta, t) = -\frac{p_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\cos \theta}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

ten potencjał maleje wolniej niż od statycznego rozkładu ładunku

Wektorowy potencjał opóźniony

Przepływ ładunku w układzie generuje prąd

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{dq}{dt} \delta(x) \delta(y) \hat{e}_z = -q_0 \omega \sin(\omega t) \delta(x) \delta(y) \hat{e}_z$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

$$t_r = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{-q_0 \omega \sin[\omega(t - R/c)] \hat{e}_z}{R} dz'$$

$$R = \sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta}$$

Możemy rozwinąć „r” w szereg jak poprzednio i zastosować przybliżenie

$$z' \ll r$$

dzięki czemu dostajemy

$$\vec{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi} \frac{1}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{e}_z$$

Mając oba potencjały możemy obliczyć wektory \vec{E} i \vec{B}

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$V(r, \theta, t) = -\frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{\cos \theta}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \\ &= -\frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c} \left\{ \cos \theta \left(-\frac{1}{r^2} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega}{rc} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right) \hat{e}_r \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \theta}{r^2} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{e}_\theta \right\} \end{aligned}$$

$$\approx \frac{p_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\cos \theta}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{e}_r$$

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\vec{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi} \frac{1}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{1}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \underbrace{(\cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta)}_{\hat{e}_z}$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{e}_\theta$$

Dla pola magnetycznego mamy

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\varphi \\ &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left\{ \frac{\omega}{c} \sin \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] + \frac{\sin \theta}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\} \hat{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \approx -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{e}_\theta$$

Wnioski:

- wektory E i B są ortogonalne
- wektory E i B mają identyczną fazę
- amplituda E i B maleje z odległością jak 1/r (tzw. fale kuliste)

Jaka jest energia/moc wypromieniowywana przez drgający dipol?

Obliczmy wektor Poyntinga

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{p_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}^2 \underbrace{\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\varphi}_{\hat{e}_r}$$

Liczmy wartość średnią wektora (po jednym okresie)

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c} \hat{e}_r$$

oraz całkowitą wypromieniowaną moc (całkując po sferze)

$$P = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2$$

$$P = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

- całkowita moc promieniowania jest 4 potęgą częstości drgań
- Wniosek: im większa częstość drgań układu tym szybciej traci on energię

Promieniowanie magnetyczne dipolowe

Wiemy już że statyczny przepływ prądu nie może być źródłem promieniowania.

Założmy więc, że prąd w pętli oscyluje w czasie

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = I(t)\delta(\rho - \rho_0)\delta(z)\hat{e}_\varphi$$

Pętla jest neutralna ładunkowo co oznacza brak potencjału skalarnego.

$$V(\vec{r}, t) = 0$$

Rozważany układ stanowi drgający dipol magnetyczny

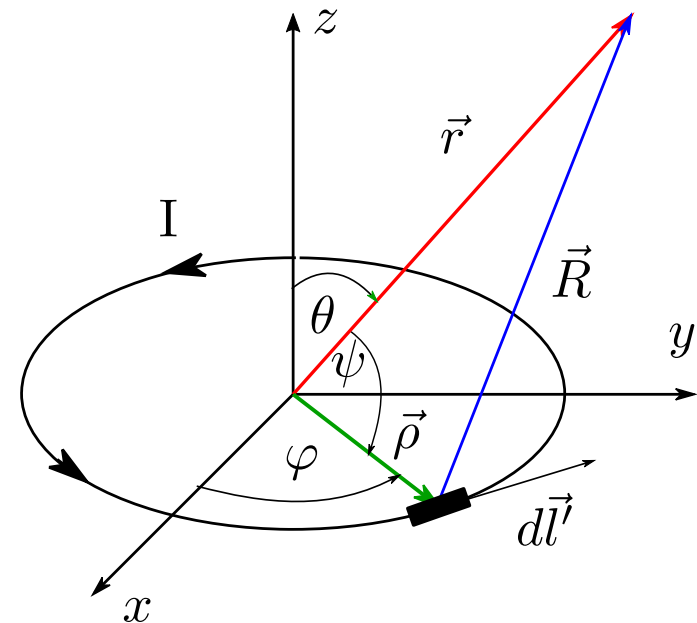
$$\vec{m}(t) = \pi\rho_0^2 I(t)\hat{e}_z = m_0 \cos(\omega t)\hat{e}_z$$

$$m_0 = \pi\rho_0^2 I_0$$

- amplituda magnetycznego momentu dipolowego

Obliczymy jak poprzednio – opóźniony potencjał wektorowy

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos[\omega(t - R/c)]}{R} d\vec{l}'$$



$$\vec{r} = r \sin \theta \hat{e}_x + r \cos \theta \hat{e}_z$$

$$\vec{\rho} = \rho_0 \cos \varphi' \hat{e}_x + \rho_0 \sin \varphi' \hat{e}_y$$

$$R = \sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos \psi}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{\rho} = r\rho_0 \cos \psi = r\rho_0 \sin \theta \cos \varphi'$$

- tu na chwilę założmy, że punkt leży w płaszczyźnie x-z (inaczej niż na rysunku)

$$\cos \psi = \sin \theta \cos \varphi'$$

Interesuje nas rozwiązanie w „dużej” odległości od dipola

$$\rho_0 \ll r$$

wówczas możemy rozwinąć wyrażenie na R i zatrzymać wyraz 1 rzędu (względem r)

$$R \approx r \left(1 - \frac{\rho_0}{r} \sin \theta \cos \varphi' \right)$$

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\rho_0}{r} \sin \theta \cos \varphi' \right)$$

$$\begin{aligned} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] &\approx \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega \rho_0}{c} \sin \theta \cos \varphi' \right] \\ &= \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \cos \left(\frac{\omega \rho_0}{c} \sin \theta \cos \varphi' \right) \\ &\quad - \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin \left(\frac{\omega \rho_0}{c} \sin \theta \cos \varphi' \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\rho_0}{r} \sin \theta \cos \varphi' \right)$$

Jeśli rozmiary dipola są niewielkie to spełniona jest zależność

$$\omega \rho_0 \ll c \quad \rightarrow \quad \frac{\omega \rho_0}{c} \ll 1$$

$$\cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] \approx \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \frac{\omega \rho_0}{c} \sin \theta \cos \varphi'$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r} = [x, 0, z], t) &\approx \frac{\mu_0 I_0 \rho_0}{4\pi r} \hat{e}_y \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos \varphi' \left\{ \frac{\cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]}{r} - \frac{\omega \rho_0^2}{cr^2} \sin \theta \cos \varphi'^2 \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \rho_0 \sin \theta \cos \varphi' \left(\frac{1}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega}{c} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi' d\varphi' = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' = \int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi' d\varphi' = 0$$

Po całkowaniu i zamianie wektora \mathbf{e}_y na \mathbf{e}_φ dostajemy wyrażenie dla przypadku ogólnego $\vec{r} = [x, y, z]$

$$\vec{A}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi r} \left\{ \frac{1}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega}{c} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\} \hat{e}_\varphi$$

dla $\omega=0$ dostajemy **potencjał wektorowy dipola statycznego**

$$\vec{A}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{e}_\varphi$$

natomiast dla „dużych” odległości

$$r \gg \frac{c}{\omega}$$

możemy zaniedbać wyraz $1/r^2$

$$\vec{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega \sin \theta}{4\pi c r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{e}_\varphi$$

Dla potencjału wektorowego drgającego dipola magnetycznego

$$\vec{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{e}_\varphi$$

pola E i B są następujące

$$\vec{E} = \underbrace{-\nabla V}_{=0} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c} \frac{1}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \hat{e}_\theta$$

Wnioski:

- pola E i B mają tę samą fazę
- wektory E i B są wzajemnie prostopadłe oraz prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali (wersor r)
- kierunki E i B drgającego dipola magnetycznego są prostopadłe do kierunków E i B dipola elektrycznego

Obliczmy jeszcze moc wypromieniowywaną przez drgający dipol magnetyczny

Wektor Poyntinga

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{m_0 \omega^2 \sin \theta}{4\pi c r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}^2 \hat{e}_r$$

Strumień uśredniony po jednym okresie

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c^3 r^2} \hat{e}_r$$

Całkując strumień po powierzchni zamkniętej (sferze) dostajemy moc promieniowania dipola magnetycznego

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

Porównajmy tę wielkość dla obu typów dipoli

$$\frac{P_m}{P_e} = \left(\frac{m_0}{p_0 c} \right)^2$$

$$\begin{aligned} m_0 &= \pi \rho_0 I_0 \\ p_0 &= q_0 d \\ &= q_0 (\pi \rho_0) \end{aligned}$$

$$\frac{P_m}{P_e} = \left(\frac{\omega \rho_0}{c} \right)^2$$

Moc promieniowania dipola magnetycznego jest znacznie mniejsza (pomijalnie mała) w stosunku do mocy generowanej przez dipol elektryczny