

W12. Elektrodynamika – zmienne w czasie pole elektromagnetyczne

Plan wykładu:

- Równania d’Alamberta
- równania fali EM w próżni
- fala płaska
- potencjały opóźnione, potencjały Lienarda-Wiecherta
- energia i pęd pola EM, wektor Poyntinga
- energia fali EM
- polaryzacja płaskiej fali EM
- moment pędu fali EM (spin fotonu)

Równania d'Alamberta

W przypadku statycznym (elektrostatyka/magnetyzacja) źródłami pól E i B są ustalone rozkłady ładunku (ρ) i gęstości prądu (\vec{j}). Wynika to z równań Maxwella

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \times \vec{H} &= \dot{\vec{D}} + \vec{j}\end{aligned}$$

Równania te posiadają także nietrywialne rozwiązania dla $\rho=\vec{j}=0$. Wówczas źródłami pola EM są zmienne w czasie wektory E i B.

Wiemy że pola wektorowe E i B możemy wyrazić za pomocą potencjałów: **skalarne** i **wektorowe**

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}\end{aligned}$$

Przekształćmy równania Maxwella tak aby zastąpić E i B potencjałami φ i A.

Obliczmy rotację pola B

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{H} = \mu_0 (\dot{\vec{D}} + \vec{j}) = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} + \mu_0 \vec{j}$$

i skorzystajmy z

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{E}} = -\nabla\dot{\varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\dot{\vec{A}}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \right) + \mu_0 \vec{j} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} + \mu_0 \vec{j}$$

oraz z własności

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} + \mu_0 \vec{j}$$

Po przegrupowaniu wyrazów dostajemy

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\varphi - \mu_0 \vec{j} \\ &= \underbrace{\nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi \right)}_{\text{czterodwywergencja}} - \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Wykorzystując niejednoznaczność potencjału wektorowego możemy założyć, że **czterodywergencja** znika

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi = 0$$

powyższy warunek definiuje tzw. **cechowanie Lorentza**.

cechowanie kulombowskie

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

wybieraliśmy w przypadku pól statycznych

Otrzymaliśmy wyrażenie zwierające potencjał wektorowy (zamiast E i B)

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Podobnie zmodyfikujemy równanie Poissona

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A}$$

korzystając z cechowania Lorentza

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

równania d'Alamberta

Otrzymaliśmy równania d’Alamberta, które mają identyczną strukturę. Pojawia się w nich operator różniczkowy

$$\square = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

który nazywamy **dalambercjanem**.

Równania d’Alamberta dla potencjałów skalarnego i wektorowego

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dla przypadku, gdy $j=\rho=0$ równania redukują się do postaci

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = 0$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0$$

- równania opisują pole elektromagnetyczne rozchodzące się w przestrzeni pozbawionej ładunków i prądów.

Dzięki związkom E i B z φ i A dostajemy identyczne równania dla tych wielkości

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0$$

równania fali elektromagnetycznej w próżni

Fala płaska

Jednym z rozwiązań równania d'Alamberta jest wyrażenie opisujące tzw. **falę płaską**

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Po wstawieniu rozwiązania do równania dostajemy związek opisujący liniową relację dyspersji $\omega(k)$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \implies \omega = kc$$

Punkty w przestrzeni, w których fala posiada tę samą fazę określa relacja

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{const}$$

Przemieszczają się one z tą samą prędkością

$$\vec{k} \cdot d\vec{r} = \omega dt$$

$$\vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega = kc$$

\vec{k} - wektor falowy, określa kierunek rozchodzenia się fali oraz jej długość λ

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

prędkość fazowa jest równa prędkości światła c .

Znając rozwiązanie dla potencjału wektorowego, możemy znaleźć postać potencjału skalarnego.

Najpierw skorzystajmy z definicji cechowania Lorentzowskiego

$$\dot{\varphi} = -c^2 \nabla \cdot \vec{A} = c^2 \vec{k} \cdot \vec{A}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

które po scałkowaniu daje

$$\varphi = \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \cdot \vec{A}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \frac{c}{k} \vec{k} \cdot \vec{A}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Dysponując potencjałami A i φ możemy wyznaczyć pola wektorowe E i B fali

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \vec{k} \times \vec{A}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

wniosek: wektor B jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali EM

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\frac{c}{k}(\vec{k} \cdot \vec{A}_0)\vec{k} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \omega\vec{A}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ &= \left(-\frac{c\vec{k} \cdot \vec{A}_0}{k}\vec{k} + ck\vec{A}_0 \right) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \end{aligned}$$

Wektor E fali EM

$$\vec{E} = \left(-\frac{c\vec{k} \cdot \vec{A}_0}{k} \vec{k} + ck\vec{A}_0 \right) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

jest prostopadły do wektora k, ponieważ

$$\vec{k} \cdot \left(-\frac{c\vec{k} \cdot \vec{A}_0}{k} \vec{k} + ck\vec{A}_0 \right) = 0$$

Jaka jest orientacja wektorów E i B względem siebie?

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{E} &= (\vec{k} \times \vec{A}_0) \cdot \left(-\frac{c\vec{k} \cdot \vec{A}_0}{k} \vec{k} + ck\vec{A}_0 \right) \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ &= \left(-\frac{c\vec{k} \cdot \vec{A}_0}{k} \underbrace{\vec{k} \times \vec{A}_0 \cdot \vec{k}}_{=0} + ck \underbrace{(\vec{k} \times \vec{A}_0) \cdot \vec{A}_0}_{=0} \right) \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wektory E i B też są prostopadłe.

Zatem dla fali EM otrzymaliśmy warunki:

$$\vec{k} \perp \vec{E}, \quad \vec{k} \perp \vec{B}, \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

które definiują **falę poprzeczną**.

Potencjały opóźnione dla ciągłego rozkładu ładunku

Dla statycznego rozkładu ładunków i prądów w przestrzeni możemy stosować równania Maxwella w „zwykłej postaci”

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

które można zapisać w postaci całkowej (zasada superpozycji)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Powyższe równania opisują przypadek w którym zmiana gęstości ładunku/prądu w czasie (**przyczyna**) zmienia natychmiast rozkład potencjałów w całej przestrzeni (**skutek**)

- nie uwzględnia zatem skończonej prędkości rozchodzenia się zaburzenia w przestrzeni (generuje dobre rozwiązania, ale tylko dla przypadku statycznego)

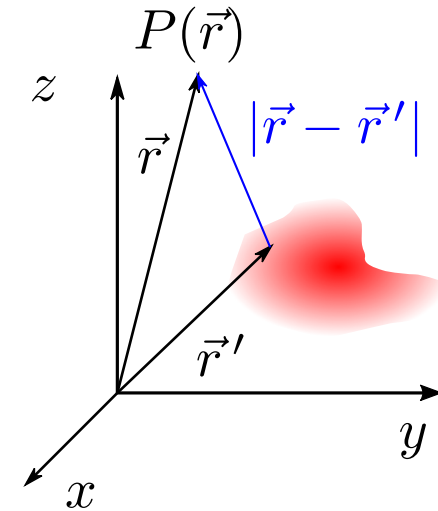
Ogólne rozwiązanie powinno uwzględniać skończoną prędkość światła.

Przypadek „dynamiczny”

- Chcemy określić potencjał w punkcie obserwacji P generowany przez rozkład ładunku $\rho(r,t)$.
- Informacja z punktu r' do punktu P dociera ze skończoną prędkością

Zatem wartość potencjału w P w chwili t zależy od rozkładu gęstości ładunku w chwili wcześniejszej $\rho(r,t_r)$.

Potencjał w P jest „opóźniony” względem zmian w rozkładzie gęstości ładunku zachodzących w czasie.



Czas potrzebny na przesłanie informacji z punktu r' do punktu P

$$\Delta t = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

Dla nas istotna będzie chwila wcześniejsza (względem czasu obserwacji t)

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

którą określamy jako tzw. **czas opóźniony**.

Całkowanie gęstości ładunku/prądu należy wykonać dla **czasu opóźnionego**

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

wtedy powyższe wzory definiują **potencjały opóźnione**.

uwaga: czas opóźniony zależy od położenia w przestrzeni, dlatego dla rozkładu ładunku będzie się zmieniał wraz ze zmianą położenia podczas całkowania

Sprawdźmy czy tak uzyskany potencjał φ spełnia równanie d'Amberta

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Najpierw policzmy gradient potencjału

$$\nabla\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla\rho + \rho \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3r'$$

Zmienną r zawiera czas opóźniony t_r

$$\nabla\rho(\vec{r}', t_r) = \frac{\partial\rho}{\partial t_r} \nabla t_r = -\frac{1}{c} \frac{\partial\rho}{\partial t} \nabla|\vec{r} - \vec{r}'|$$

Następnie korzystamy z zależności

$$\nabla|\vec{r} - \vec{r}'| = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\nabla\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial\rho}{\partial t} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \rho \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d^3r'$$

Teraz możemy obliczyć dywergencję tego wyrażenia

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial\rho}{\partial t} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \rho \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) d^3r'$$

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

↓

$$\frac{\partial}{\partial t_r} = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{c} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \nabla \frac{\partial \rho}{\partial t} \longrightarrow \nabla \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \cancel{-\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}} \longrightarrow \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\ -\rho \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \longrightarrow \nabla \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \\ \cancel{-\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \nabla \rho} \longrightarrow \nabla \rho(\vec{r}', t_r) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{array} \right) d^3 r'$$

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - 4\pi \rho \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \right) d^3 r' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

Czyli otrzymaliśmy równanie d'Alemberta dla potencjału skalarnego

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

Potencjały Lienarda-Wiecherta (dla ładunku punktowego)

- ładunek punktowy porusza po trajektorii opisywanej równaniem (nie znamy jawnej postaci): $\vec{r}_0(t)$
- położenie punktu obserwacji określa wektor wodzący: \vec{r}
- położenie źródła względem punktu obserwacji określa zależny od czasu wektor: $\vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{r}_0(t)$
- czas opóźniony t' oraz czas obserwacji t łączy relacja: $t' + \frac{R(t')}{c} = t$

W chwili t' w **układzie własnym cząstki** wytwarza ona jedynie potencjał skalarny

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R(t')} \quad \vec{A} = 0$$

Składowe obu potencjałów tworzą czterowektor

$$A^\mu = (\varphi, c\vec{A})$$

i jego składowe w innym układzie można znaleźć dokonując jego transformacji.

Szukamy czterowektora, którego składowe w układzie własnym ($|v|=0$) będą spełniać narzucony warunek, a w innym dowolnym układzie ($|v|>0$) będą opisywać składowe obu potencjałów.

Wykorzystamy czterowektor

$$x^\mu = [c(t - t'), \vec{r} - \vec{r}'] \quad \vec{r}' = \vec{r}_0(t')$$

który zapewnia niezmienniczość równania definicyjnego względem transformacji Lorentza

$$x^\mu x_\mu = 0 \quad \rightarrow \quad t' + \frac{R(t')}{c} = t$$

i czterowektor prędkości

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}$$

$$u^0 = \frac{cdt}{\sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \gamma$$

$$u^i = \frac{dx^i}{\sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2}} = \frac{v^i}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = \gamma \frac{v^i}{c}$$

Z obu czterowektorów możemy skonstruować nowy czterowektor

$$A^\mu = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qu^\mu}{x_\nu u^\nu}$$

Składowe czterowektora

$$A^\mu = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eu^\mu}{x_\nu u^\nu}$$

$$\begin{aligned} A^0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qu^0}{x_\nu u^\nu} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{c(t-t')\gamma - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\gamma} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^i &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qu^i}{x_\nu u^\nu} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma \frac{v_i}{c}}{c(t-t')\gamma - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\gamma} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{v_i}{c}}{R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}} \end{aligned}$$

W układzie spoczynkowym ($v_i=0$) składowe czterowektora przyjmują odpowiednie wartości.

W układzie laboratoryjnym potencjały wyrażają się następująco

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}} \right) \quad R(t') = c(t - t')$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\frac{\vec{v}}{c^2}}{R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}} \right) \quad A^\mu = (\varphi, c\vec{A})$$

są to potencjały Lienarda-Wiecherta,

dają one następujące pola wektorowe E i B (liczone w chwili t')

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(R - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c} \right)^3} \left[\underbrace{\frac{\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}R}{\gamma^2}}_{\text{pole predkościowe}} + \underbrace{\frac{1}{c^2} \vec{R} \times \left\{ \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}R \right) \times \frac{d}{dt'} \vec{v} \right\}}_{\text{promieniowanie EM}} \right]$$

$$\vec{B} = \frac{1}{R} \vec{R} \times \vec{E} \quad \text{- pola E i B są prostopadłe}$$

Energia i pęd pola EM, wektor Poyntinga

$$\nabla \times \vec{H} = \dot{\vec{D}} + \vec{j} \quad \vec{E} \cdot /$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \vec{H} \cdot /$$

Po wykonaniu mnożenia, równania odejmujemy stronami

$$\underbrace{\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E}}_{-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})} = \vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} + \vec{E} \cdot \vec{j}$$

Wykorzystujemy współliniowość wektorów E i D oraz H i B

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) - \vec{E} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \text{- wektor Poyntinga}$$

Przestrzeń zawierającą pola oraz ich źródła otaczamy powierzchnią zamkniętą i liczymy całkę objętościową

$$\int_V \nabla \cdot \vec{S} dV = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dV - \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{S} dV = \oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\sigma} = 0 \quad \text{- zakładamy że w dużej odległości od źródła, pola znikają}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dV = - \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV$$

Gęstość prądu zastąpmy przepływem dyskretnych ładunków

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \sum_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}$$

Na ładunek poruszający się w polu EM działa siła Lorentza

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = q_i \vec{E} + q_i \vec{v}_i \times \vec{B}$$

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = q_i \vec{E} + q_i \vec{v}_i \times \vec{B} \quad \vec{v}_i \cdot /$$

$$q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E} = m_i \vec{v}_i \cdot \dot{\vec{v}}_i - \underbrace{q_i \vec{v}_i \cdot (\vec{v}_i \times \vec{B})}_{=0} = \frac{d}{dt} \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \frac{d}{dt} E_i^{kin}$$

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \frac{d}{dt} \sum_i E_i^{kin}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV = - \frac{d}{dt} \sum_i E_i^{kin}$$

Prawa strona określa zmianę energii kinetycznej cząstek będących źródłem pola.
Ale układ jest izolowany, więc zmiana ta musi być kompensowana zmianą energii pola.

Wielkość $W = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$

jest gęstością energii pola elektrycznego i magnetycznego,
w obszarze w którym nie występują ładunki i prądy.

Otoczając tylko część układu powierzchnią zamkniętą otrzymamy wyrażenie

$$\oint_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV - \frac{d}{dt} \sum_i E_i^{kin}$$

które określa ubytek/przyrost energii pola i energii cząstek.

Wektor Poyntinga stanowi więc gęstość strumienia energii przenikającego powierzchnię otaczającą układ.

Energia fali EM

Wektor Poyntinga określiliśmy w postaci

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

natomiast pola E i H fali EM mają postać

$$\vec{E} = \left(-\frac{c\vec{k} \cdot \vec{A}_0}{k} \vec{k} + ck\vec{A}_0 \right) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{k} \times \vec{A}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

wykorzystamy związek

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \left(-\frac{c\vec{k} \cdot \vec{A}_0}{k} \vec{k} + ck\vec{A}_0 \right) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \times \frac{\vec{k}}{\mu_0} \times \vec{A}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{k} \left[-\frac{c\vec{k} \cdot \vec{A}_0}{k} \vec{k} \cdot \vec{A}_0 + ck\vec{A}_0^2 \right] - \underbrace{\vec{A}_0 \left[-\frac{c\vec{k} \cdot \vec{A}_0}{k} \vec{k}^2 + ck\vec{A}_0 \cdot \vec{k} \right]}_{=0} \right) \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left(ck^2 \vec{A}_0^2 \frac{\vec{k}}{k} - c \left[\vec{k} \cdot \vec{A}_0 \right]^2 \frac{\vec{k}}{k} \right) \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

wykorzystamy związek

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$= \frac{\vec{k}}{k} \frac{c}{\mu_0} \left(k^2 \vec{A}_0^2 - \left[\vec{k} \cdot \vec{A}_0 \right]^2 \right) \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Strumień energii jest skierowany równoległe do kierunku rozchodzenia się fali EM.

Licząc gęstość energii

$$W = \frac{1}{2} \left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right)$$

dla fali EM otrzymamy wynik

$$\vec{S} = cW \frac{\vec{k}}{k}$$

- wektor falowy wyznacza kierunek strumienia,
a c określa jego prędkość

Polaryzacja płaskiej fali EM

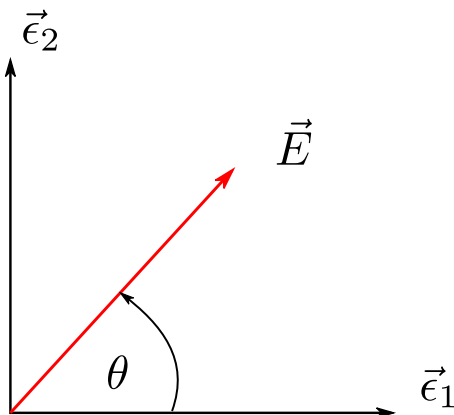
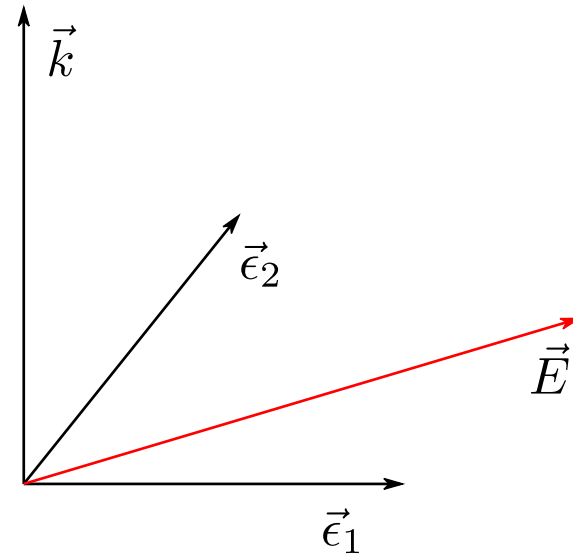
Płaska fala EM to fala poprzeczna (spolaryzowana liniowo)

$$\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{B}$$

Ponieważ pola E i B są wektorami możemy je zapisać jako kombinację liniową dwóch wektorów
– również prostopadłych do kierunku przemieszczania się fali

$$\vec{E} = (\vec{\epsilon}_1 E_1 + \vec{\epsilon}_2 E_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- wykorzystujemy zapis zespolony natężenia fali, pamiętając, że fizyczne znaczenie ma tylko np. część rzeczywista (krótszy zapis, łatwiejsze rachunki)



$$\vec{E} \cdot \vec{\epsilon}_1 = E_1$$

$$\vec{E} \cdot \vec{\epsilon}_2 = E_2$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{E_2}{E_1}$$

Składowe pola E mogą się różnić fazą

$$\vec{\epsilon}_1 \rightarrow \vec{\epsilon}_1 e^{i\varphi}$$

$$\vec{\epsilon}_2 \rightarrow \vec{\epsilon}_2$$

Wówczas pole E opisuje wyrażenie

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon}_1 E_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)} + \vec{\epsilon}_2 E_2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Założmy

$$E_0 = E_1 = E_2$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Wówczas dostaniemy pole E w postaci

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 (\vec{\epsilon}_1 \pm i\vec{\epsilon}_2) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Dla fali poruszającej się w kierunku „z”,
obie składowe możemy utożsamić z osiami „x” i „y”

$$E_x(\vec{r}, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$E_y(\vec{r}, t) = \pm E_0 \sin(kz - \omega t)$$

Otrzymamy wtedy

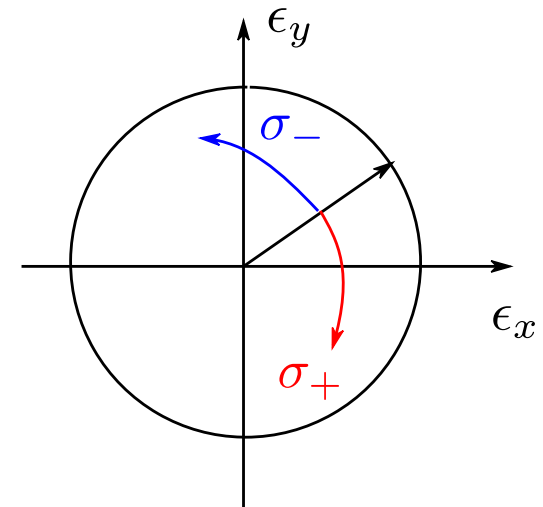
$$E_x(\vec{r}, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$E_y(\vec{r}, t) = \pm E_0 \sin(kz - \omega t)$$

Dla ustalonego punktu z wektor E obraca się wokół osi „z” z częstością ω .

Równania te opisują falę **spolaryzowaną kołowo** (skrętność, ang. helicity):

- **lewoskrętnie** (znak „-”) przeciwnie do ruchu wskazówek zegara
- **prawoskrętnie** (znak „+”) zgodnie ze wskazówkami zegara



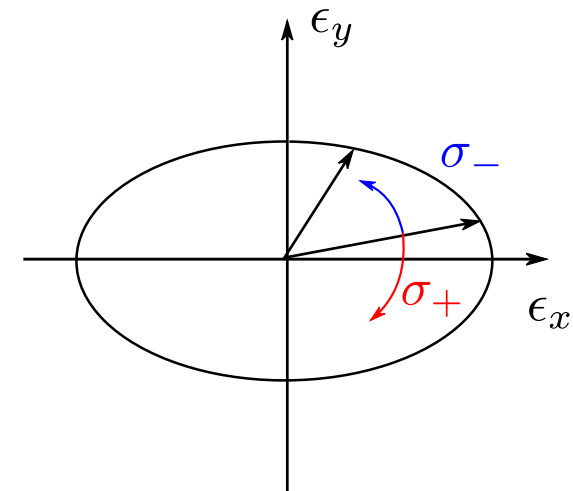
Dla warunku

$$E_{x,0} \neq E_{y,0}$$

równania opisują falę **spolaryzowaną eliptycznie** (prawo lub lewoskrętnie)

$$E_x(\vec{r}, t) = E_{x,0} \cos(kz - \omega t)$$

$$E_y(\vec{r}, t) = \pm E_{y,0} \sin(kz - \omega t)$$



Orbitalny i spinowy moment pędu fotonu

Wektor Poyntinga opisuje strumień energii unoszony przez foton

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = cW \frac{\vec{k}}{k}$$

Korzystając z wyrażenia na energię fotonu

$$Energia = \vec{p} \cdot \vec{c}$$

dostajemy relację, która opisuje **gęstość pędu** (π) fotonu

$$W\hat{k} = \frac{\vec{S}}{c^2}c = \vec{\pi}c \quad \longrightarrow \quad \vec{\pi} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

Możemy policzyć moment pędu fotonu

$$\vec{J} = \frac{1}{c^2} \int \vec{r} \times \vec{S} dV \quad \vec{E} = \underbrace{-\nabla\varphi}_{=0} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Wektory E i B wygodnie będzie wyrazić w nieco innej postaci
(skorzystamy z symbolu Levi-Civity + konwencja sumacyjna Einsteina)

$$B_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k$$

$$E_i = -\frac{\partial}{\partial t} A_i$$

oraz iloczyn wektorowy

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$\begin{aligned} J_i &= \varepsilon_{ijk} \int r_j (\vec{E} \times \vec{B})_k d^3 r \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \int r_j E_l (\nabla \times \vec{A})_m d^3 r \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mnp} \int r_j \dot{A}_l \frac{\partial}{\partial r_n} A_p d^3 r \end{aligned}$$

Wyraz pod całką możemy zapisać wykorzystując całkowanie przez części

$$r_j \dot{A}_l \frac{\partial A_p}{\partial x_n} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n} (r_j \dot{A}_l A_p)}_{(\nabla \cdot ())_n} - r_j \frac{\partial \dot{A}_l}{\partial r_n} A_p - \underbrace{\frac{\partial r_j}{\partial r_n} \dot{A}_l A_p}_{=\delta_{jn}}$$

i całkę zawierającą pierwszy wyraz (dywergencja) zamienić na całkę powierzchniową, która znika

$$J_i = \frac{1}{\mu_0 c^2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mnp} \int \left(-\delta_{jn} \dot{A}_l A_p - r_j \frac{\partial \dot{A}_l}{\partial r_n} A_p \right) d^3 r$$

Wykorzystujemy teraz własność $\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mnp} = \delta_{kn}\delta_{lp} - \delta_{kp}\delta_{ln}$

$$J_i = \frac{1}{\mu_0 c^2} \varepsilon_{ijk} \int (\delta_{kn}\delta_{lp} - \delta_{kp}\delta_{ln}) \left(-\delta_{jn}\dot{A}_l A_p - r_j \frac{\partial \dot{A}_l}{\partial r_n} A_p \right) d^3 r$$

$$J_i = \frac{1}{\mu_0 c^2} \varepsilon_{ijk} \int \left(\underbrace{-\delta_{jk}\dot{A}_p A_p}_{=0} - r_j \frac{\partial \dot{A}_p}{\partial r_k} A_p + \dot{A}_j A_k + r_j \underbrace{\frac{\partial \dot{A}_n}{\partial r_n} A_k}_{=0} \right) d^3 r$$

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = \varepsilon_{ikk} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{A}_n}{\partial r_n} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial A_n}{\partial r_n} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = 0$$

Zostają dwa wyrazy pod całką

cechowanie kulombowskie

$$J_i = \frac{1}{\mu_0 c^2} \varepsilon_{ijk} \int A_j \dot{A}_k d^3 r + \frac{1}{\mu_0 c^2} \varepsilon_{ijk} \int \left(r_j \frac{\partial \dot{A}_p}{\partial r_k} \right) A_p d^3 r$$

z których pierwszy nie zależy od wyboru układu współrzędnych

Obliczmy jego wartość dla fali spolaryzowanej kołowo, poruszającej się w kierunku osi „z”

$$\vec{A} = A_0 [\cos(kz - \omega t)\hat{e}_x \pm \sin(kz - \omega t)\hat{e}_y]$$

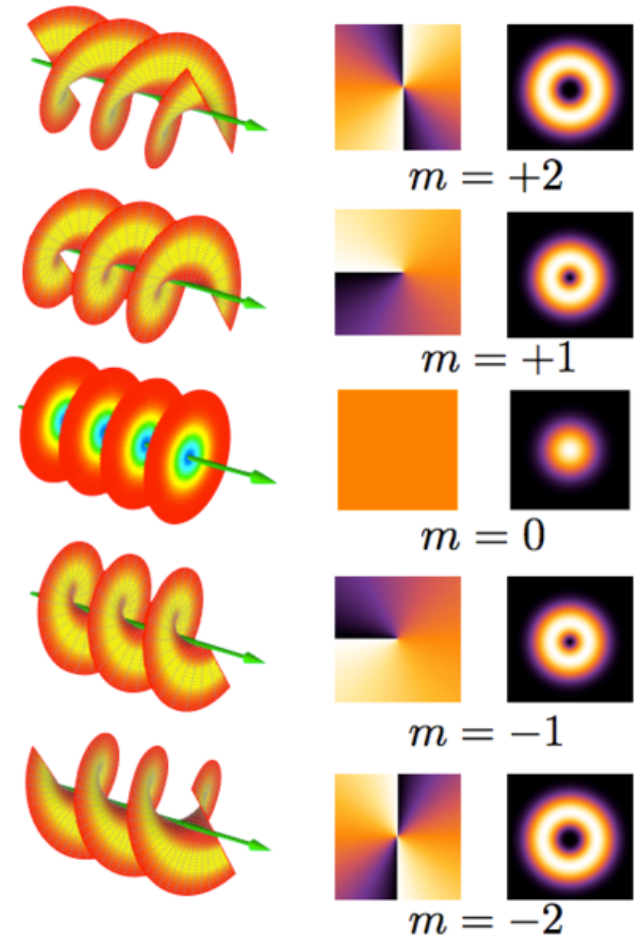
$$\dot{\vec{A}} = \omega A_0 [\sin(kz - \omega t)\hat{e}_x \mp \cos(kz - \omega t)\hat{e}_y]$$

$$\vec{A} \times \dot{\vec{A}} = \mp \omega A_0^2 \hat{e}_z$$

Wyraz w pierwszej całce jest stały, a jego znak zależy od polaryzacji fotonu. Wielkość tę możemy określić jako **spin fotonu** (dokładniej: gęstość spinowa)

$$\vec{s}_f = \mp \frac{1}{\mu_0 c^2} \omega A_0^2 \hat{e}_z$$

Dzięki tej własności, fotony spolaryzowane kołowo mogą być używane np. do wzbudzenia elektronów (orbitalny i spinowy moment pędu elektronu jest skwantowany).



Źródło: Wikipedia
(https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_angular_momentum_of_light)

$m = -1, 0, +1$ - istnieją w naturze

$m = -2, +2$ - wytwarzane sztucznie