W11. Elektrodynamika – pole elektryczne i magnetyczne w ośrodkach

Plan wykładu:

- przenikalność dielektryczna i magnetyczna
- polaryzacja dielektryka, ładunek polaryzacyjny objętościowy i powierzchniowy
- zmiany wektorów E i D na granicy ośrodków
- metoda obrazów dla dielektryka

Dotychczas rozważaliśmy ośrodek izotropowy jakim jest próżnia.
W sposób niejawny użyliśmy liniowych zależności

pomiędzy E i D:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

ε - przenikalność dielektryczna ośrodka

oraz pomiędzy B i H:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

μ - przenikalność magnetyczna ośrodka

W ośrodkach izotropowych wektory E i D oraz B i H są równoległe.

Natomiast w ośrodkach anizotropowych związki te są nadal liniowe,
ale wektory te nie są równoległe

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{i,j} E_j$$

- przenikalność dielektryczna i magnetyczna stają się wielkościami tensorowymi

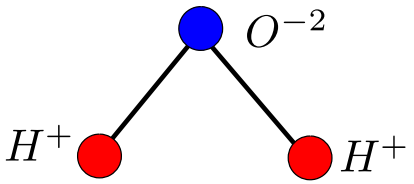
$$B_i = \mu_0 \sum_{j=1}^{3} \mu_{i,j} H_j$$

Polaryzacja dielektryka

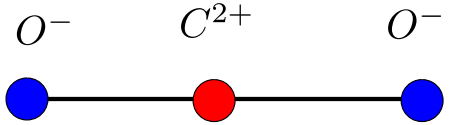
Kilka własności:

- dielektryk nie posiada ładunku swobodnego – pole elektryczne nie jest całkowicie kompensowane
- pole elektryczne wnika do dielektryka i oddziałuje z atomami i cząsteczkami
- cząsteczki mogą charakteryzować się spontaniczną polaryzacją (posiadają elektryczny moment dipolowy) co jest konsekwencją przeniesienia części ładunku pomiędzy atomami cząsteczki ze względu na asymetrię wiązań

Cząsteczka H_2O

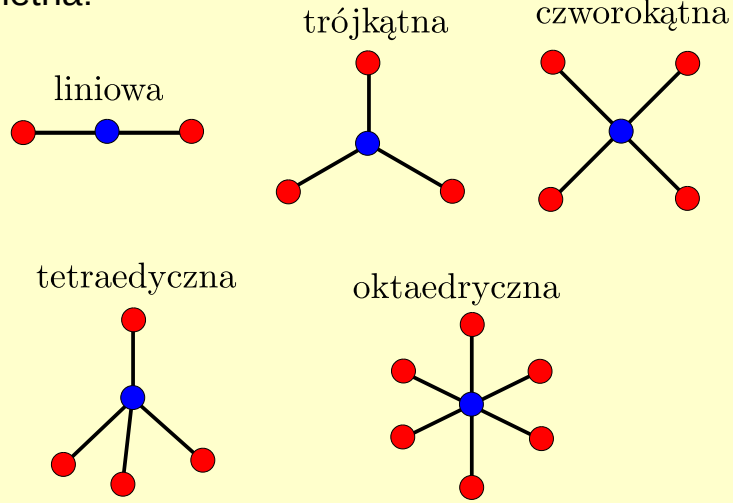


Cząsteczka CO_2 (brak momentu dipolowego)



- moment dipolowy może być indukowany polem elektrycznym

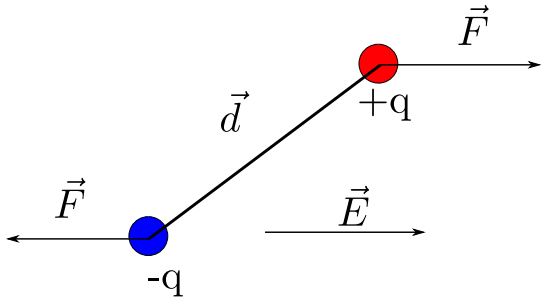
Cząsteczki nie posiadające momentu dipolowego.
Symetria:



Moment dipolowy może być indukowany polem elektrycznym,
wówczas będzie on zależny od kierunku i wartości E

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}$$

Siła elektryczna działająca na dipol zeruje się



$$\vec{F}_+ = +q\,\vec{E}$$

$$\vec{F}_- = -q\,\vec{E}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$$

Nie znika moment siły

$$\vec{N} = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{p} \times \vec{E} \neq 0$$

co oznacza że dipole będą starały się ustawić równolegle do pola E

Polaryzacja elektryczna P – określa wielkość momentu dipolowego na jednostkę objętości.
Można ją traktować jako miarę uporządkowania dipoli w przestrzeni.
- chaotyczny rozkład da P=0
- uporządkowany rozkład dipoli (zgodne zwroty) da P=max

Polaryzacja dielektryka stanowi źródło (wewnętrzne) pola elektrycznego. Wewnetrzna pole E będzie skierowane przeciwnie do pola zewnętrznego (wystąpi częściowa kompensacja).

Potencjał wytwarzany przez pojedynczy dipol

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

Załóżmy że rozkład momentu dipolowego jest ciągły w przestrzenii (uzasadnienie: rozpatrujemy dużą liczbę blisko siebie położonych atomów)

$$\vec{p} = \vec{P}(\vec{r})dV$$

P - polaryzacja

Zgodnie z zasadą superpozycji dostajemy

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}d^3r'$$

wykorzystujemy relację $\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{P}(\vec{r}\,')\nabla_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r'$$

Wykorzystajmy wzór na pochodną iloczynu

$$\nabla_{r'} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \nabla_{r'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \nabla_{r'} \cdot \vec{P}(\vec{r}\,')$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\int_V \nabla_{r'} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3r' - \int_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \nabla_{r'} \cdot \vec{P}(\vec{r}\,') d^3r' \right)$$

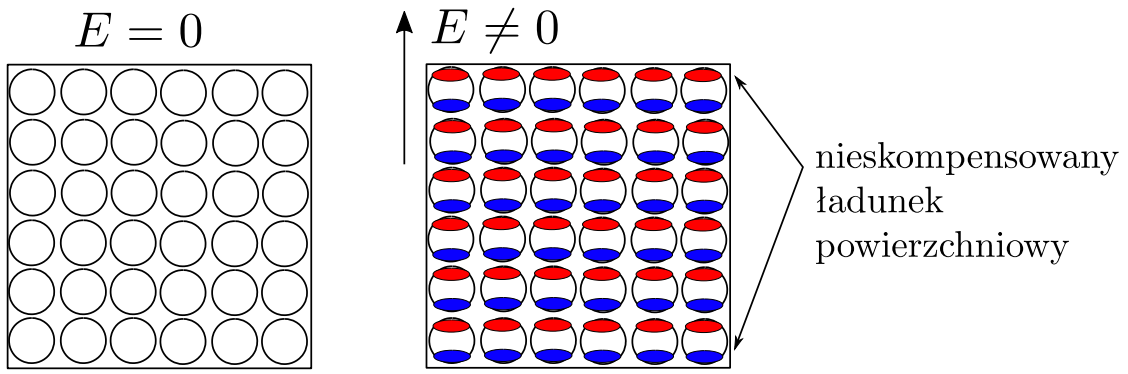
oraz tw. Gaussa-Ostrogradskiego (w pierwszej całce)

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\oint_\Sigma \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \cdot d\vec{s} - \int_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \nabla_{r'} \cdot \vec{P}(\vec{r}\,') d^3r' \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\oint_\Sigma \frac{\sigma_{zw}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} ds - \int_V \frac{\rho_{zw}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3r' \right) \end{aligned}$$

$\sigma_{zw} = \vec{P} \cdot \vec{n}$ - ładunek związany na powierzchnii dielektryka

$\rho_{zw}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})$ - ładunek związany wewnątrz dielektryka

- dla E brak polaryzacji/momentu dipolowego
- dla E>0, atomy/cząsteczki polaryzują się, elektrony nieznacznie przesuwają się w przestrzeni, na powierzchnii dolnej i górnej pojawia się nieskompensowany ładunek



Wypadkowe pole elektryczne

Załóżmy że w dielektryku zgromadziliśmy ładunek swobodny ρ_{sw}
(np. elektrony w pasmie przewodnictwa pochodzą
ze zjonizowanych domieszek donorowych)

Możemy określić całkowity ładunek

$$\rho(\vec{r}) = \rho_{sw}(\vec{r}) + \rho_{zw}(\vec{r})$$

i na podstawie prawa Maxwella (dla próżni)

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho = \rho_{sw} + \rho_{zw} = \rho_{sw} - \nabla \cdot \vec{P}$$

całkowite (wypadkowe) pole elektryczne

Po przekształceniu otrzymamy

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) = \rho_{sw}$$

co po porównaniu z relacją

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{sw}$$

prowadzi do związku

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

w wyniku reakcji ośrodka na pole E,
wektor indukcji D zostanie powiększony
o wektor polaryzacji w stosunku do wartości w próżni

Dielektryki liniowe

Jeśli związek P z E jest liniowy

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

χ_e - podatność elektryczna ośrodka (wielkość bezwymiarowa)

to takie dielektryki nazywamy dielektrykami liniowymi

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

Bezwymiarowy parametr ε nazywamy przenikalnością względną ośrodka.

$$\varepsilon = 1 + \chi_e$$

próżnia ε=1, papier ε=1.4, szkło ε=3.7-10, krzem ε=11.68, woda ε~80,

$BaTiO_3$ ε=1200 – 10^4, $CaCu_3Ti_4O_{12}$ ε>2,5 10^5

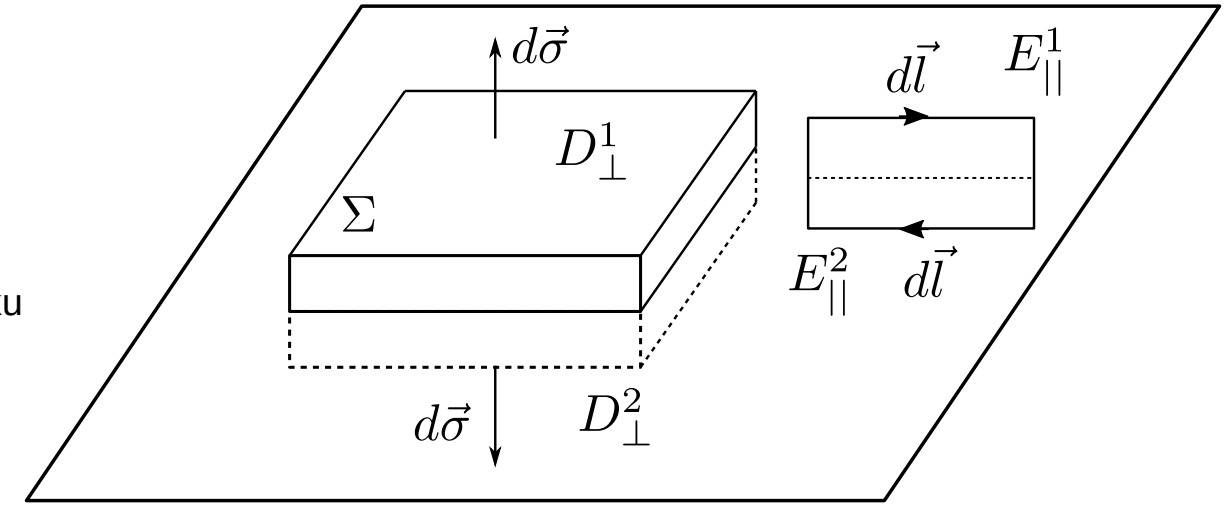
Oprócz dielektryków liniowych istnieją

- paraelektryki (zależność P(E) nieliniowa bez histerezy)
- ferroelektryki (zależność P(E) nieliniowa z histerezą –> spontaniczna polaryzacja dla E=0)

Zmiany wektorów pól E i D na granicy ośrodków

Zakładając brak swobodnego ładunku powierzchniowego ($\rho_{sw}=0$), z równania Maxwella

$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \; d\vec{\sigma} = q$$



otrzymamy ciągłość wektora D w kierunku normalnym do powierzchnii

$$D_{\perp}^{1} d\sigma - D_{\perp}^{2} d\sigma = 0$$

Możemy także rozważyć składową równoległą do powierzchnii

$$\oint_{C} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \iint_{S} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$$

co dla pól statycznych daje zależność składowej równoległej wektora E

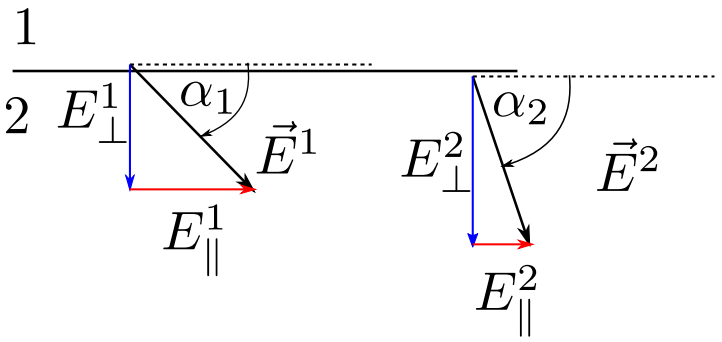
$$E_{||}^{1} dl - E_{||}^{2} dl = 0$$

składowa równoległa jest ciągła

$$E_{||}^{1} = E_{||}^{2}$$

Zależność

$$D_\perp^1 = D_\perp^2$$



możemy wyrazić za pomocą przenikalności względnej

$$\varepsilon_1 E_\perp^1 = \varepsilon_2 E_\perp^2$$

$$E_\perp^1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_\perp^2$$

- jeśli $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ to pole E w ośrodku (2) jest słabsze niż w ośrodku (1)

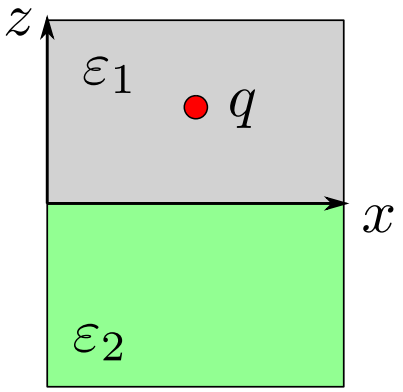
Ponieważ w obu ośrodkach istnieją inne realacje pomiędzy składowymi,
na granicy ośrodków następuje zmiana kierunku pola E

$$tg\alpha_1 = \frac{E_\perp^1}{E_\parallel^1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{E_\perp^2}{E_\parallel^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} tg\alpha_2$$

Metoda obrazów dla dielektryka

Dwa obszary o stałych ε_1 i ε_2 przylegają do siebie, w obszarze (1) na wysokości z znajduje się ładunek punktowy q.

Jaki jest rozkład potencjału w przestrzeni?



Musimy zatem znaleźć rozwiązanie równania Poissona w obszarach (1) i (2)

$$\varepsilon_1 \nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad z > 0$$

$$\varepsilon_2 \nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad z < 0$$

z warunkami brzegowymi

$$D_{\perp}^{(1)} = D_{\perp}^{(2)}$$

$$E_{\parallel}^{(1)} = E_{\parallel}^{(2)}$$

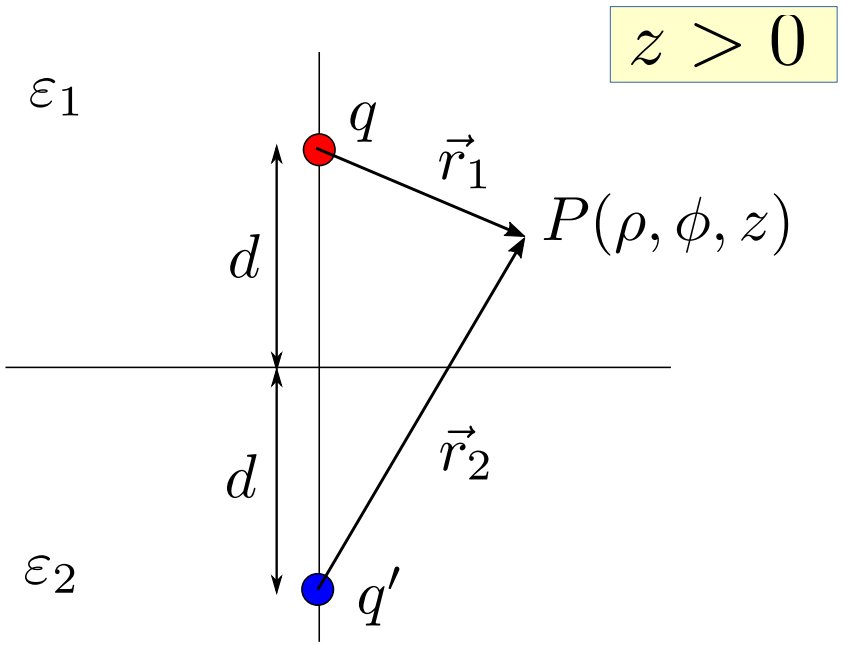
Rozwiązanie w obszarze (1)

$$\phi^{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}\right), \quad z > 0$$

Wprowadzamy współrzędne walcowe
(zgodne z symetrią układu)

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}$$

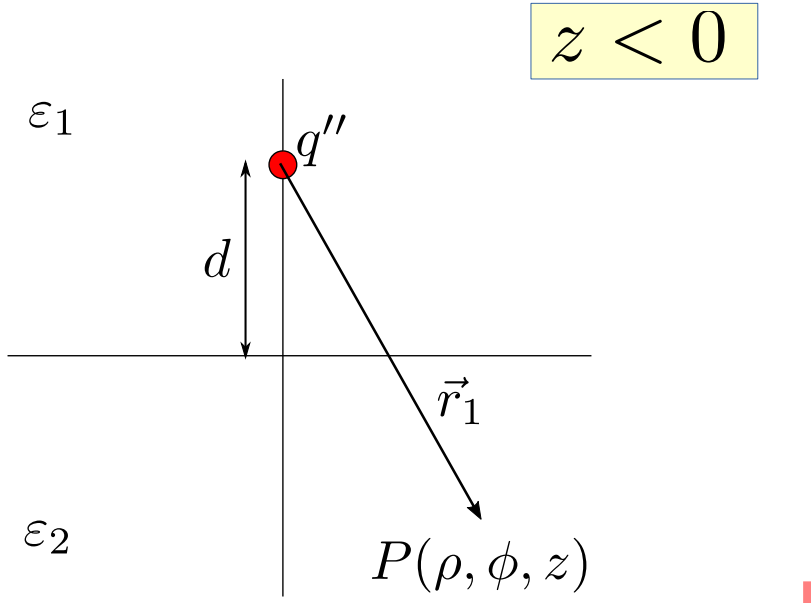
$$r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}$$



Rozwiązanie w obszarze (2) pochodzi od zrenormalizowanego ładunku umieszczonego w obszarze (1)

(w obszarze 2 nie ma ładunku rzeczywistego)

$$\phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\frac{q''}{r_1}, \quad z < 0$$



Musimy wyznaczyć q' i q''. Korzystamy ze związków

$$\varepsilon_1 E_z^{(1)} = \varepsilon_2 E_z^{(2)}$$

$$E_\rho^{(1)} = E_\rho^{(2)}$$

które są słuszne dla z=0

$$\varepsilon_1 E_z^{(1)} = -\varepsilon_1 \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(q'-q)d}{(\rho^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\varepsilon_2 E_z^{(2)} = -\varepsilon_2 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q''d}{(\rho^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

z pierwszej zależności dostaniemy

$$q - q' = q''$$

Dla składowych równoległych

$$E_\rho^{(1)} = -\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \rho}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+q'}{\varepsilon_1}\frac{\rho}{(\rho^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_\rho^{(2)} = -\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \rho}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q''}{\varepsilon_2}\frac{\rho}{(\rho^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dostajemy drugi warunek

$$\frac{q+q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\, q$$

obraz widziany od strony ładunku q

$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\, q$$

zrenormalizowany ładunek widziany od strony materiału (2)

Rozważmy dwa przypadki na interfejsie dielektryk-próżnia

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \qquad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$$

1) ładunek q umieszczamy nad powierzchnią GaAs

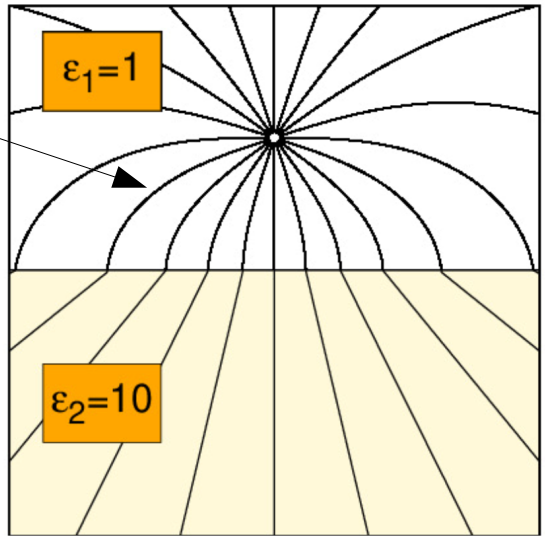
$\varepsilon_1 = 1 \quad (vacum)$

$\varepsilon_2 = 12.9 \quad (GaAs)$

$q' = -0.86$ - ładunek q jest przyciągany

$q'' = 1.87$ - renormalizacja ładunku widzianego w GaAs

linie zakrzywiają się jak dla dipola



2) ładunek q umieszczamy pod powierzchnią GaAs (zamieniamy stałe dielektryczne)

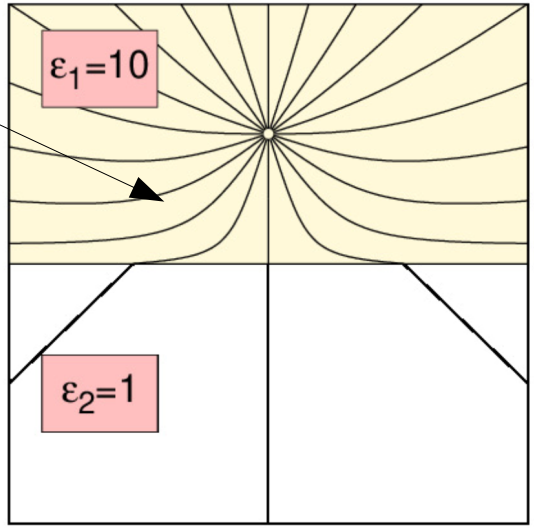
$\varepsilon_1 = 12.9 \quad (GaAs)$

$\varepsilon_2 = 1 \quad (vacum)$

$q' = +0.86$ - ładunek q jest odpychany przez obraz

$q'' = 0.14$ - renormalizacja ładunku widzianego w próżni

linie zakrzywiają się jak dla ładunków jednoimiennych



Związek pomiędzy polaryzacją P i ładunkiem związanym

$$\rho_{zw} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

oraz związek pomiędzy P i E

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

daje zależność (poza punktem w którym jest umieszczony ładunek q)

$$-\chi_e \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = 0$$ - brak objętościowego ładunku związanego (polaryzacyjnego)

Ale na granicy ośrodków pojawia się
skokowa zmiana podatności elektrycznej

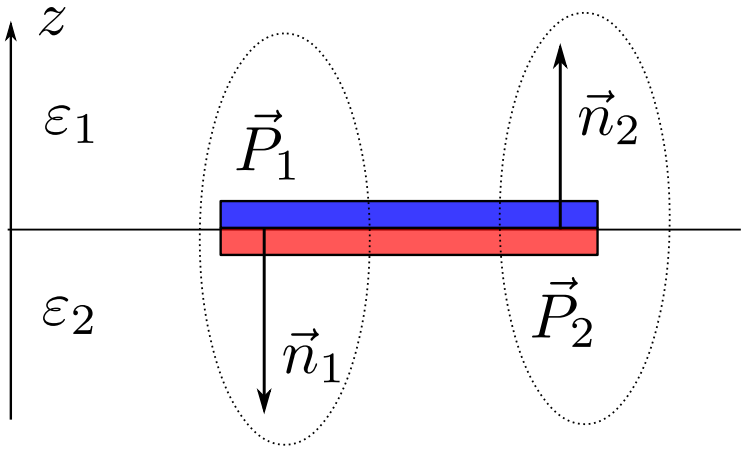
$$\Delta\chi = \chi_2 - \chi_1 \neq 0$$

lokalizuje się tam ładunek polaryzacyjny
(po obu stronach interfejsu)

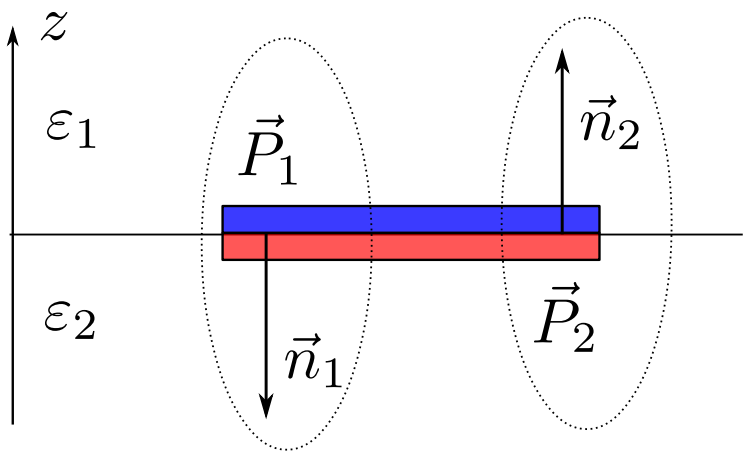
$$\sigma_{zw}^{(1)} = \vec{P}^{(1)} \cdot \vec{n}_1$$

$$\sigma_{zw}^{(2)} = \vec{P}^{(2)} \cdot \vec{n}_2$$

$$\sigma_{zw} = \sigma_{zw}^{(1)} + \sigma_{zw}^{(2)}$$



$$\sigma_{zw} = \sigma_{zw}^{(1)} + \sigma_{zw}^{(2)}$$



W kierunku normalnym do interfejsu niezerowa jest tylko składowa z-owa

$$\sigma_{zw} = \vec{P}^{(1)} \cdot \vec{n}_1 + \vec{P}^{(2)} \cdot \vec{n}_2 = \left(P_z^{(2)} - P_z^{(1)} \right) \widehat{e}_z$$

$$P_z^{(1)} = \chi_e^{(1)} \varepsilon_0 E_z^{(1)}$$

$$\varepsilon_1 = 1 + \chi_e^{(1)}$$

$$P_z^{(1)} = -(\varepsilon^{(1)} - 1)\varepsilon_0 \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}$$

Po podstawieniu $\Phi^{(1)}$ i $\Phi^{(2)}$ otrzymamy wyrażenie opisujące rozkład ładunku polaryzacyjnego na interfejsie

$$\sigma_{zw} = (-1) \cdot \frac{q\, d}{2\pi\varepsilon_0 \left(\rho^2 + d^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Rozkład ładunku polaryzacyjnego

$$\sigma_{zw} = (-1) \cdot \frac{q\,d}{2\pi\varepsilon_0 \left(\rho^2 + d^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

wnioski:

- dla $\varepsilon_2 >> \varepsilon_1$ otrzymujemy rozkład jak dla przewodnika (przewodnik ε~1000)
- jeśli ε_2 i ε_1 różnią się to znak ładunku polaryzacyjnego zależy od tego gdzie umieścimy ładunek q

  a) dla $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ będzie ujemny

  b) dla $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ będzie dodatni