

W10. Elektrodynamika – przewodniki i warunki brzegowe na ich powierzchniach

Plan wykładu:

- idealny przewodnik i jego własności
- ładunki indukowane
- metoda obrazów
- rozwinięcie multipolowe

Warunki brzegowe na powierzchni przewodnika.

Chcąc rozwiązać równanie Poissona/Laplace musimy najpierw określić warunki brzegowe.

Dla pojedynczego ładunku lub ograniczonego przestrzennie rozkładu ładunku zakładaliśmy **znikanie potencjału** w nieskończoności.

Ze względu na specyficzne własności przewodników, WB na ich powierzchni określimy w inny sposób.

Przewodnik (idealny) to materiał zawierający „nieskończoną” ilość elektronów.

Powyższa definicja implikuje jego własności:

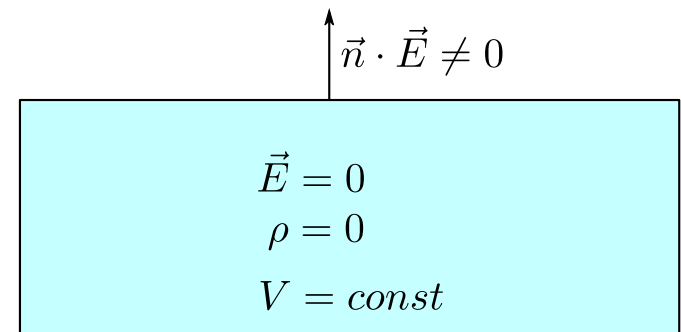
- w całej objętości przewodnika $\vec{E} = 0$
(przepływ elektronów kompensuje pole elektryczne)
- na zewnętrznej powierzchni przewodnika pole elektryczne jest prostopadłe do jego powierzchni
(składowa równoległa znika ze względu na przepływ elektronów)

- $\rho(\vec{r}) = 0$ w całej objętości przewodnika, co wynika z $\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = -\rho$

- nieskompensowany ładunek może występować jedynie na powierzchni
(tam następuje skok tj. nieciągłość pola E)

- potencjał wewnątrz i na powierzchni przewodnika jest stały

$$V(\vec{r}_2) = V(\vec{r}_1) - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1)$$

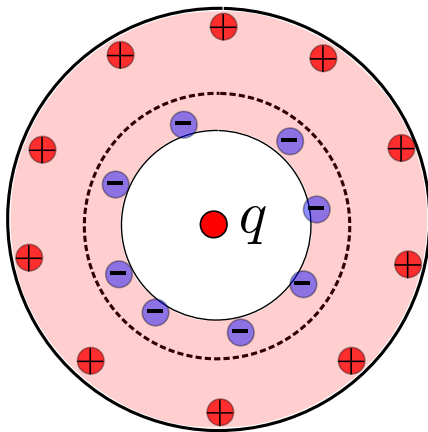


Ładunki indukowane

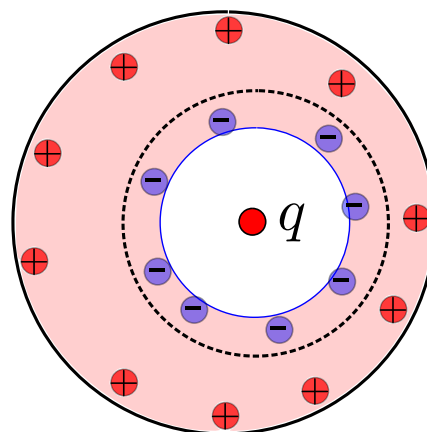
Jeśli przewodnik umieścimy w polu E , to nastąpi redystrybucja elektronów w jego wnętrzu – aby skompensować pole zewnętrzne.

Redystrybucja ładunku zachodzi tylko na powierzchni.

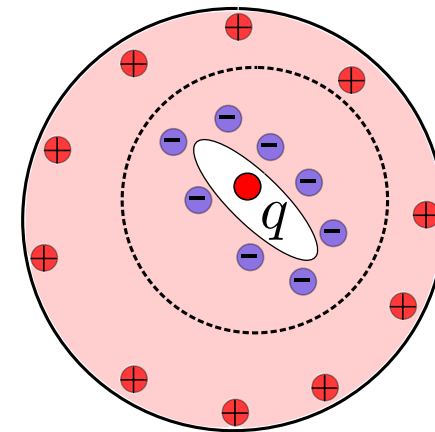
symetria



brak symetrii



brak symetrii

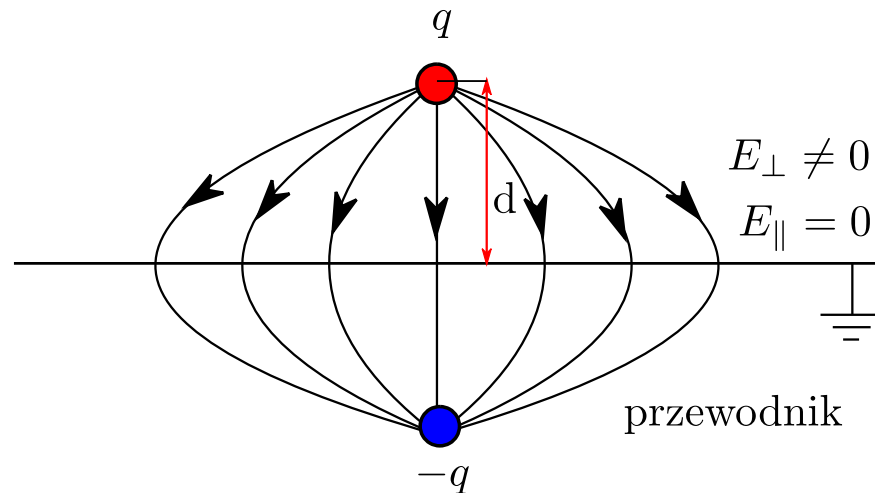


- ładunek we wnętrzu wytwarza niezerowe E .
- na powierzchni wnetki gromadzi się ładunek, który kompensuje ładunek we wnętrzu
- na powierzchni Gaussa (linia przerywana) wypadkowe pole E znika.
- przesunięcie ładunku ujemnego na powierzchnię wnetki pozostawia ładunek dodatni
- ten lokalizuje się na powierzchni zewnętrznej przewodnika
(aby wyzerować składową równoległą do powierzchni)
- na powierzchni wewnętrznej gromadzi się ładunek $-q$, a na zewnętrznej $+q$
- informacja o położeniu wnetki w przewodniku zostaje ukryta

Pole elektrostatyczne w obecności przewodników. Metoda obrazów

Ponieważ rozwiązanie równania Poissona/Laplace'a jest jednoznaczne, nieważny staje się sposób jego otrzymania – ważny jest wynik.

Założmy że ładunek q jest umieszczony w odległości d od metalowej płyty. Jaki będzie rozkład potencjału/pola E nad przewodnikiem?



Problem można rozwiązać znajdując rozwiązanie równania Poissona z WB:

- na powierzchni przewodnika $\varphi(x, y, 0) = 0$
- oraz w nieskończoności $\lim_{d \rightarrow \infty} \varphi(\vec{r}) = 0$

Zauważmy, że identyczne WB będą spełnione jeśli usuniemy płytę i wstawimy ładunek $-q$ w punkcie $(0,0,-d)$

Potencjał wypadkowy otrzymamy z zasady superpozycji

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right)$$

spełnia on równanie Poissona w obszarze nad płytą (ale nie w obszarze przewodnika).

Metodę obrazów możemy wykorzystać także w przypadku układów charakteryzujących się wysoką symetrią (walec, sfera).

Obraz a ładunek indukowany

Obraz ładunku nie jest ładunkiem rzeczywistym – ten wirtualny ładunek pozwala nam uwzględnić WB. Natomiast **ładunek indukowany** na powierzchni jest realny i stanowi wraz z ładunkiem pierwotnym **źródło pola**.

Otrzymany z metody obrazów potencjał pozwoli nam obliczyć rozkład **ładunku powierzchniowego (indukowanego)**

$$\rho(\vec{r}) = -\epsilon_0 \nabla^2 \varphi(\vec{r})$$

Uwagi:

- równanie Poissona nie rozróżnia obrazu ładunku od ładunku rzeczywistego
- ładunku indukowanego nie otrzymamy w wyniku różniczkowania potencjału na powierzchni – bo tam ładunek jest nieciągły (potencjał jest ciągły)

Ładunek wyznaczamy w następujący sposób

- część powierzchni otaczamy prostopadłościenną powierzchnią
- na powierzchni musi być spełnione prawo Gaussa

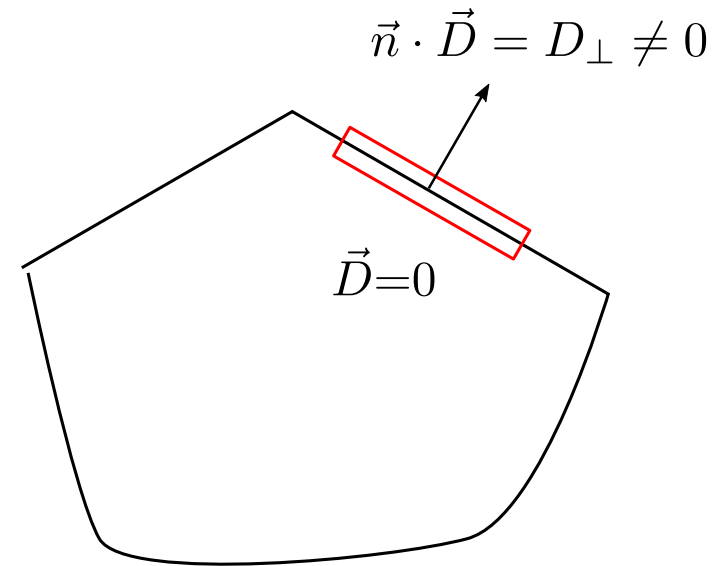
$$\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = q$$

- powierzchnie: dolna i boczne nie dają wkładu do całki
- wkład daje tylko powierzchnia górna

$$\vec{D} \cdot d\vec{s} = dq = \sigma ds$$

$$D_{\perp} ds = \sigma ds$$

$$D_{\perp} = \sigma$$



Rozkład potencjału znamy – wyliczmy rozkład ładunku indukowanego na powierzchni

$$\vec{D} = -\varepsilon_0 \nabla \varphi$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right)$$

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{[x, y, z-d]}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{[x, y, z+d]}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Na powierzchni przewodnika ($z=0$) dostaniemy

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{q}{4\pi} \left(\frac{[x, y, -d]}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{[x, y, d]}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= -\frac{qd}{2\pi} \frac{[0, 0, 1]}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$D_{\perp} = D_z$$

$$\sigma = D_z = -\frac{qd}{2\pi} \frac{[0, 0, 1]}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- rozkład przestrzenny ładunku indukowanego

Jaka jest całkowita ilość ładunku indukowanego?

$$\begin{aligned}
 q_{ind} &= \int \sigma(x, y) dx dy \\
 q_{ind} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr r \sigma(r) = -\frac{qd}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr r \frac{1}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -qd \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d(r^2) \frac{1}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = qd \frac{1}{(x^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} \Bigg|_0^{\infty} = -q
 \end{aligned}$$

Całkowity ładunek indukowany

$$q_{ind} = -q$$

Obliczmy jeszcze

- 1) siłę z jaką oddziałują na siebie ładunki: **rzeczywisty i jego obraz**
- 2) energię ich oddziaływania

Potencjał od ładunku indukowanego w punkcie gdzie znajduje się ładunek q

$$\varphi^{ind}(d) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 z} \Big|_{z=2d} = \frac{-q}{8\pi\epsilon_0 d}$$

$$\cancel{E_{p,ind} = \frac{-q^2}{8\pi\epsilon_0 d}}$$

Zazwyczaj energię potencjalną ładunku w polu liczymy mnożąc potencjał przez ładunek
 - w przypadku ładunku indukowanego taka relacja nie jest prawdziwa

Siłę działającą na ładunek rzeczywisty opisuje wyrażenie zawierające E

$$\begin{aligned} F_z &= -qE = -q \frac{\partial}{\partial z} \varphi^{ind}(z) \Big|_{z=2d} = -q \frac{\partial}{\partial z} \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 z} \Big|_{z=2d} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 z^2} \Big|_{z=2d} \\ &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 4d^2} = \frac{-q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \end{aligned}$$

Możemy policzyć pracę potrzebną do przeniesienia ładunku do nieskończoności
 – to będzie **rzeczywista** energia potencjalna ładunku

$$E_p = \int_d^{\infty} \frac{-q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2} dz = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{z} \Big|_d^{\infty} = \frac{-q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}$$

Wnioski:

- energia oddziaływania z ładunkiem indukowanym jest **2 razy mniejsza** niż dwóch statycznych ładunków (podczas przesuwania ładunku – przesuwa się również jego obraz)
- oddziaływanie obraz-ładunek indukowany ma charakter **samoodziaływania**

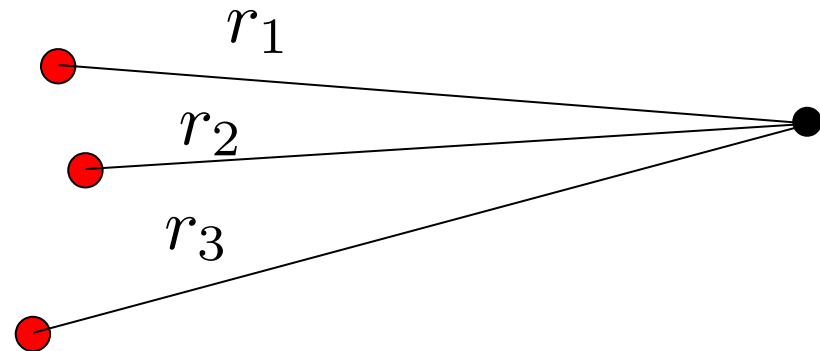
Rozwinięcie multipolowe

Rozważamy teraz sytuację, w której chcemy wyznaczyć potencjał w dużej odległości od pewnego rozkładu przestrzennego ładunków

W pierwszym przybliżeniu możemy uśrednić odległość i użyć jej do określenia potencjału wypadkowego

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\vec{r} - \vec{r}_i|$$

$$\varphi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\bar{r}}$$



Ale miałyby to sens jedynie wtedy, gdyby ładunki nie kasowały się wzajemnie – a tego nie możemy być pewni.

Przykład. Potencjał dipola elektrycznego

Z zasady superpozycji dostaniemy wyrażenie

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}|} + \frac{-q}{|\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}|} \right)$$

Przekształcamy mianowniki obu wyrazów

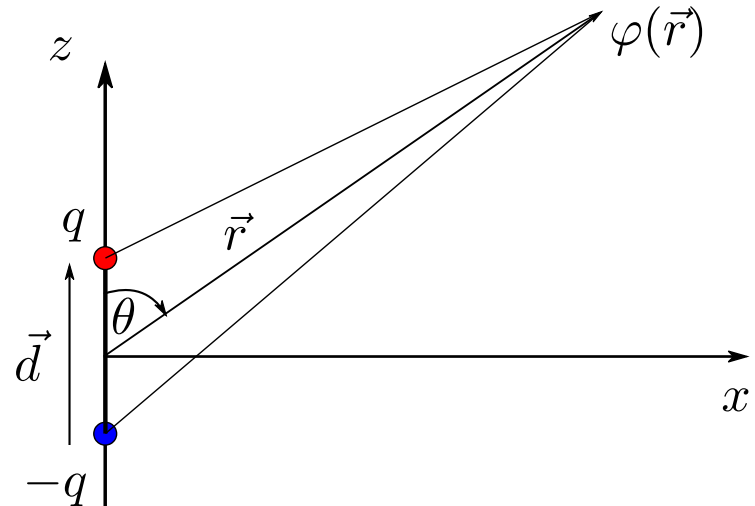
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi_0} \left(\frac{q}{r\sqrt{1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}} + \frac{-q}{r\sqrt{1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}} \right), \quad \frac{d^2}{r^2} \approx 0$$

i stosujemy rozwinięcie w szereg Taylora dla

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \frac{63}{256}x^5 + O(x^6) \quad (x \ll 1)$$

Z dokładnością do wyrazów liniowych otrzymamy (zmiana znaku w drugim wyrazie ze względu na ładunek)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi_0} \frac{q}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{2r^2} + \dots - 1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{2r^2} \dots \right) = \frac{1}{4\pi_0} \frac{q\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^3} = \frac{1}{4\pi_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2}$$



Potencjał układu 2 różnoimiennych ładunków zmienia się jak $1/r^2$

Cztery ładunki można tak ułożyć, aby wyeliminować potencjał dipolowy, wówczas pozostały wyraz zmieniać się będzie jak $1/r^3$ itd.

Zależności te możemy wykorzystać w ogólniejszych rozważaniach.

Rozważamy teraz potencjał generowany od ciągłego rozkładu ładunku

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Jądro całkowe możemy rozwinąć w szereg wielomianów Legendre'a

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}$$

funkcja tworząca wielomianów Legendre'a
(*Matematyczne Metody Fizyki – A. Lenda*)

$$g(\cos \theta, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\cos \theta \cdot t + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) t^n$$

założenia:

$$r > r'$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r r'}$$

$$t = \frac{r'}{r}$$

Po uzgodnieniu wyrazów dostajemy wyrażenie

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r r'}\right) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \theta)$$

$$\theta = \angle(\vec{r}, \vec{r}')$$

Powyższe rozwinięcie wstawiamy pod całkę

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int r'^n \rho(\vec{r}') P_n \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r r'}\right) d^3 r'$$

Podstawiamy kolejno

$$P_0(x) = 1 \quad \varphi_{mon}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \text{- potencjał wytwarzany przez monopol elektryczny (zmienia się jak 1/r)}$$

$$Q = \int \rho(\vec{r}') d^3 r' \quad \text{- całkowity ładunek}$$

Drugi wyraz

$$P_1(x) = x$$

$$\begin{aligned} \varphi_{dip}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r r'} d^3 r' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} d^3 r' \\ &= \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int \rho(\vec{r}') r' \cos \theta d^3 r' \end{aligned}$$

- potencjał dipola elektrycznego
(zmienia się jak $1/r^2$)

lub korzystając z zapisu wektorowego

$$\varphi_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d^3 r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2}$$

gdzie

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d^3 r' \quad - \text{moment dipolowy rozkładu ładunku}$$

Dla ładunków punktowych przechodzi w sumę $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$

a dla dwóch różnoimiennych ładunków dostaniemy $\vec{p} = q\vec{d}$

Analogicznie możemy wyznaczyć potencjał kwadrupolowy itd.

Potencjały związane z wyrazami wyższych rzędów będą szybciej zanikać przy oddalaniu się od gęstości ładunku

– zazwyczaj wystarczy uwzględnić kilka pierwszych wyrazów aby uzyskać dobre przybliżenie potencjału (ucinamy szereg)