Wykład I

Plan wykładu:

- **wstęp do mechaniki klasycznej,**
- **elementy rachunku wariacyjnego,**
- **więzy,**
- **współrzędne uogólnione**
- **zasada najmniejszego działania,**
- **równanie Eulera-Lagrange'a**

Najbardziej ogólny podział fizyki, niezależnie od tematyki którą się zajmujemy to:
fizyka doświadczalna (FD) i fizyka teoretyczna (FT).

W ramach wykładu zajmiemy się tylko wybranymi działami FT, tj:

- mechaniką klasyczną
- mechaniką realtywistyczną
- elektrodynamiką

(mechanika kwantowa omawiana jest na oddzielnym wykładzie)

Punktem wyjścia w omawianych zagadnieniach będzie zasada najmniejszego działania. Sformułujemy ją najpierw dla potrzeb mechaniki klasycznej, następnie modyfikując ją otrzymamy mechanikę relatywistyczną, a po kolejnej modyfikacji – elektrodynamikę.

Takie podejście pozwoli nam dodatkowo uzyskać podstawowe prawa fizyki.

Klasyczna mechanika teoretyczna

- opisuje ruch mniej lub bardziej złożonych klasycznych układów fizycznych (punkt materialny, bryła sztywna, układ ciał etc).

- złożoność Wszechświata nie pozwala go opisać dokładnie, ograniczamy się więc do opisu jego niewielkiego fragmentu, stosując pewne uproszczenia w modelu (**przybliżenia**)

- spełnienie **początkowych założeń** oraz **przybliżeń** jest testem wiarygodności uzyskanych rozwiązań

Słownik pojęć, których używamy w mechanice klasycznej (i nie tylko)

- **Układ** – to opisywana przez nas część Wszechświata, może oddziaływać z resztą Wszechświata za pomocą sił i/lub potencjałów zewnętrznych, przy braku takich oddziaływań jest układem izolowanym

- **Punkt materialny** – to przykład układu, w którym rozmiary obiektu są zaniedbywalne w porównaniu ze skalą opisywanego zjawiska, np. ruch planety w polu grawitacyjnym gwiazdy

- Położenie punktu materialnego, w trójwymiarowym układzie współrzędnych opisuje **wektor wodzący** r.

  (stosowane układy współrzędnych to: **prostokątny kartezjańsk**i lub **krzywoliniowe**: **cylindryczny, sferyczny lub paraboliczny**)

- **Czas** – parametr numerujący kolejność zdarzeń

- Pełną informację o położeniu punktu materialnego zawiera jego **trajektoria** tj. zależność położenia cząstki w przestrzeni od czasu

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

i stanowi szukane rozwiązanie problemu

- Znając trajektorię możemy wyliczyć prędkość i przyśpieszenie jako kolejne pochodne wektora wodzącego po czasie

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) \qquad \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

oraz inne wielkości fizyczne (energia, pęd etc.)

- **Związki pomiędzy współrzędnymi, prędkościami i przyśpieszeniami nazywamy równaniami ruchu**. Są to na ogół równania różniczkowe 2 rzędu na funkcję, którą jest jest poszukiwana trajektoria.

- Jednoznaczność rozwiązań równań ruchu uzyskuje się podając warunki początkowe tj. położenia i prędkości w chwili początkowej - określają one **stan układu**

- Dla układu zawierającego N cząstek, rozwiązaniem jest 3N-wymiarowa trajektoria (przestrzeń 3D), czyli N wektorów wodzących opisujących położenie każdej z cząstek

- Każda niezależna współrzędna wymagana do jednoznacznego opisu układu stanowi jeden **stopień swobody** (**p=1**).

  Cząstka swobodna w przestrzeni 3D ma **p=3** stopnie swobody, a układ N cząstek posiada **p=3N** stopni swobody.

Więzy

Są to związki pomiędzy współrzędnymi, które spełnione są w dowolnej chwili czasowej.

Określamy je w postaci równości (**więzy dwustronne**)

$$f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N_w$$

lub nierówności (**więzy jednostronne**)

$$f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, t) \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N_w$$

więzy skleronomiczne - brak jawnej zależności od czasu

więzy reonomiczne - jawna zależność od czasu

Każde równanie więzów dwustronnych ogranicza liczbę stopni swobody o 1 (dotyczy więzów dwustronnych).

przykład Ruch cząstki w płaszczyźnie x-y.

Równanie więzów (skleronomicznych) $f(\vec{r}) = z = 0$

$$N_w = 1, \quad p = 2$$

liczba więzów

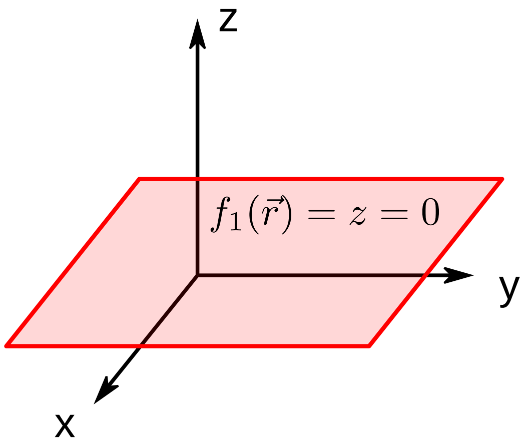
liczba stopni swobody

przykład 1 ruch cząstki w płaszczyźnie x-y.

równanie więzów (skleronomicznych)

$$f(\vec{r}) = z = 0$$

$$(N_w = 1, \quad p = 2)$$



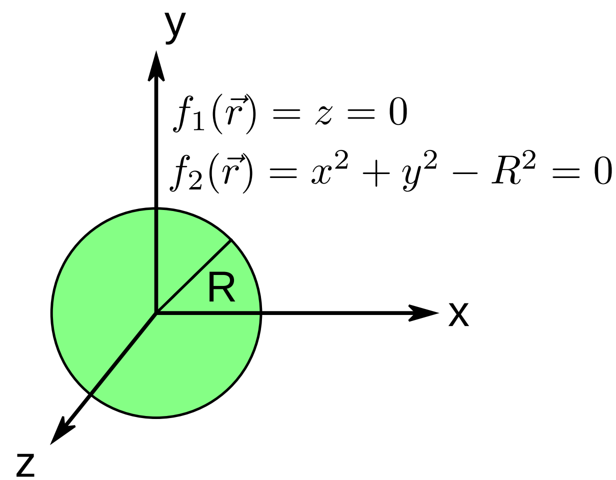
przykład 2 ruch po okręgu

równanie więzów (skleronomicznych)

$$f_1(\vec{r}) = z$$

$$f_2(\vec{r}) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

$$(N_w = 2, \quad p = 1)$$

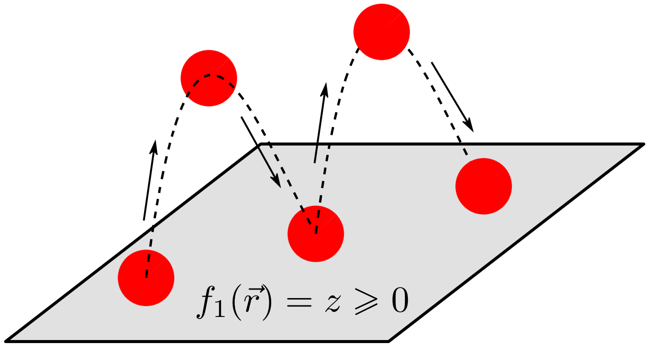


przykład 3

ruch piłki po boisku

$$f_1(\vec{r}) = z \geq 0$$

$$(N_w = 1, \quad p = 3)$$



Współrzędne uogólnione

Równania więzów musimy uwzględnić w równaniach ruchu, np. dodając do nich **siły reakcji więzów**.
- to komplikuje ich postać (chcemy by były jak najprostsze).

Rozwiązanie: wybór odpowiedniego układu współrzędnych

np.: dla ruchu po okręgu –> układ współrzędnych cylindrycznych

$$(x, y, z) \to (r, \varphi, z) \qquad r = R, \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = 0$$

Współrzędne uogólnione to dowolny zbiór **p** wielkości wyznaczających jednoznacznie położenie ciał tworzących układ

$$\vec{q} = \{q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_p\}$$

Pochodne czasowe współrzędnych uogólnionych to oczywiście **prędkości uogólnione**

$$\dot{\vec{q}} = \{\dot{q}_1,\, \dot{q}_2,\, \ldots,\, \dot{q}_p\}$$

Współrzędnymi uogólnionymi mogą być np.

- współrzędne biegunowe

$$\vec{q} = \{r,\, \varphi\}$$

- lub kartezjańskie

$$\vec{q} = \{x,\, y,\, z\}$$

o ile równania więzów nie narzucają zależności pomiędzy nimi.

Zasada najmniejszego działania (elementy rachunku wariacyjnego)

Rozważmy układ o p stopniach swobody. Zgodnie z definicją zbiór funkcji

$$\mathrm{q}_\alpha = q_\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p$$

opisuje **rzeczywisty** ruch układu i stanowi rozwiązanie problemu.

Wprowadźmy teraz inny zbiór funkcji, który różni się od poprzedniego o nieskończenie małą wartość w dowolnej chwili czasowej – **ruch porównawczy układu**

$$\tilde{q}_\alpha = q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t)$$

$$\delta q_\alpha(t) \text{ - wariacja współrzednej uogólnionej}$$

Dla dowolnej funkcji

$$F(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

możemy wyznaczyć jej **wariację** ze względu na różnicę pomiędzy ruchem rzeczywistym i porównawczym

$$\begin{aligned} \delta F &= F(\tilde{q}_\alpha, \dot{\tilde{q}}_\alpha, t) - F(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \\ &= F(q_\alpha + \delta q_\alpha, \dot{q}_\alpha + \delta \dot{q}_\alpha, t) - F(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \\ &= \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right) \end{aligned}$$

wariacja wsp. uogólnionej

$$\delta q_\alpha(t) = \tilde{q}_\alpha - q_\alpha(t)$$

wariacja prędkości uogólnionej

$$\delta \dot{q}_\alpha(t) = \dot{\tilde{q}}_\alpha - \dot{q}_\alpha(t)$$

a dzięki liniowości operatora różniczkowego dostajemy

$$\delta \dot{q}_\alpha(t) = \frac{d}{dt} \delta q_\alpha(t)$$

Dla funkcji F możemy zdefiniować **funkcjonał** w postaci

$$I[q_\alpha, \dot{q}_\alpha] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, F(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

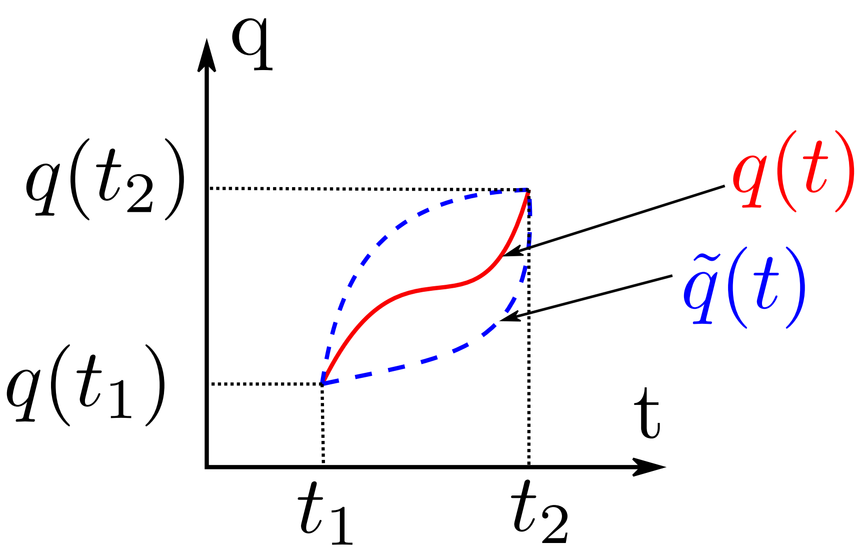
i policzyć jego wariację

$$\delta I = I[\tilde{q}_\alpha, \dot{\tilde{q}}_\alpha] - I[q_\alpha, \dot{q}_\alpha] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \big(F(\tilde{q}_\alpha, \dot{\tilde{q}}_\alpha, t) - F(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)\big) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta F$$

Rozważmy teraz ruchy: rzeczywisty i porównawcze (dowolne) w przedziale czasu (t_1,t_2) przy założeniu że ich współrzędne uogólnione na początku i na końcu przedziału są identyczne
(wariacja w t_1 i t_2 znika)

$$\tilde{q}_\alpha(t_1) = q_\alpha(t_1) \rightarrow \delta q_\alpha(t_1) = 0$$

$$\tilde{q}_\alpha(t_2) = q_\alpha(t_2) \rightarrow \delta q_\alpha(t_2) = 0$$



Postulat

Dla dowolnego układu mechanicznego można znaleźć funkcję współrzędnych i prędkości uogólnionych oraz czasu

$$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$$

taką że funkcjonał

$$S[\tilde{q}_\alpha, \dot{\tilde{q}}_\alpha] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\tilde{q}_\alpha, \dot{\tilde{q}}_\alpha, t)$$

przyjmuje najmniejszą wartość dla ruchu rzeczywistego.

$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ - **funkcja Lagrange'a**

$S[\tilde{q}_\alpha, \dot{\tilde{q}}_\alpha]$ - **działanie**

Warunek najmniejszego działania dla ruchu rzeczywistego generuje równania ruchu we współrzędnych uogólnionych.

Zażądajmy spełnienia tego warunku, czyli $\delta S = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{d}{dt}\delta q_\alpha + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha$$

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta \dot{q}_\alpha\right) \\
&= \sum_\alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{d}{dt}\delta q_\alpha\right) \\
&= \sum_\alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q_\alpha + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right) \\
&= \sum_\alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right) + \sum_\alpha \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right|_{t_1}^{t_2} \\
&= \sum_\alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha \\
&= 0
\end{aligned}$$

wariacje δq_α znikają
w punktach krańcowych

tego żądamy

Warunek ten musi być spełniony dla dowolnego wyboru wariacji współrzędnych uogólnionych, więc dla

$$\delta q_\alpha(t) \neq 0$$

musi zachodzić

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p)$$

Są to **równania Eulera-Lagrange'a** drugiego rodzaju i stanowią układ p równań ruchu na funkcje które są trajektoriami ruchu rzeczywistego.

Własności funkcji Lagrange'a

- Przy zmianie układu współrzędnych uogólnionych jej postać może się zmienić (ze względu na różne zależności pomiędzy współrzędnymi)
- Jeśli dla f. Lagrange'a zapisanej w jednym ukł. wsp. dostajemy poprawne równanie ruchu, to po jej przetransformowaniu do innego układu również otrzymamy poprawne równania ruchu (które być może będą miały mniej skomplikowaną postać i uda nam się znaleźć ich rozwiązania)
- f. Lagrange'a układu złożonego z dwóch nieoddziałujących podukładów jest sumą funkcji Lagrange'a tych podukładów
$$L = L_1 + L_2$$
- f. Lagrange'a nie jest zdefiniowana jednoznacznie, pomnożenie przez stałą daje te same równania ruchu
$$L^{'} = aL \iff L$$
- Dodanie do f. Lagrange'a zupełnej pochodnej czasowej dowolnej funkcji współrzędnych uogólnionych i czasu prowadzi do tych samych równań ruchu
$$L^{'} = L + \frac{d}{dt} f(q_\alpha, t) \iff L$$

Różniczka zupełna i pochodna zupełna

Różniczka zupełna określa liniową zależność zmian wartości funkcji od infinitezymalnych zmian jej argumetów (suma wyrazów 1-rzędu w rozwinięciu Taylora)

$$df = \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} d\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

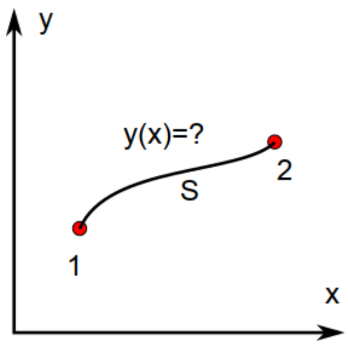
Pochodna zupełną definiujemy jako pochodną względem zmiennej niezależnej np. czasu, biorąc pod uwagę fakt, że zmienne zależne jak współrzędne i prędkości uogólnione od czasu zależą

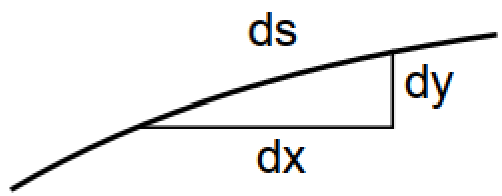
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

W równaniu powyższym widać różnicę pomiędzy zupełną pochodną czasową a pochodną cząstkową. W szczególnym przypadku: pochodna cząstkowa może znikać (brak jawnej zależności od czasu), mimo to zupełna pochodna czasowa nadal istnieje (ze względu na niejawną zależność q i q').

Przykład zastosowania rachunku wariacyjnego

Znaleźć równanie krzywej dającej najmniejszą odległość między dwoma punktami na płaszczyźnie





$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$S = \int_1^2 ds \quad \rightarrow \quad S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

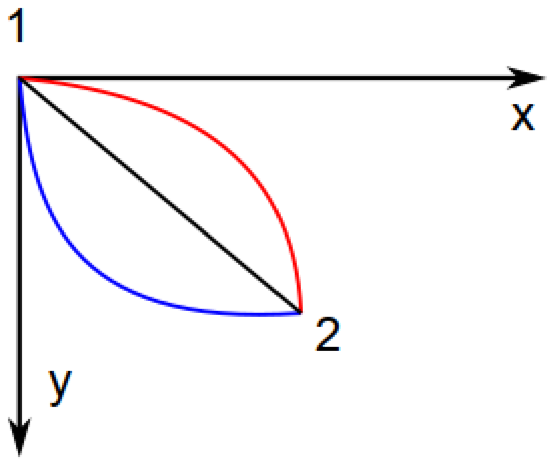
równanie EL $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$

$$f = f(y') \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = const = C$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \quad \rightarrow \quad (1 - C^2)y'^2 = C^2 \quad \rightarrow \quad y' = const = D \quad \rightarrow \quad y = y(x) = Dx + b$$

Równanie szukanej krzywej $\quad y(x) = Dx + b$

Przykład. Znaleźć równanie krzywej dla której czas poruszania się ciała pomiędzy dwoma punktami w polu grawitacyjnym jest najkrtószy (problem brachistochrony)



$$t=\int_1^2 dt \quad\rightarrow\quad ds=V\,dt \quad\rightarrow\quad dt=\frac{ds}{V}$$

$$E=E_p+E_k=-mgy+\frac{mV^2}{2}=0 \quad\rightarrow\quad V=\sqrt{2gy}$$

$$t=\int_1^2\frac{ds}{V}=\int_0^{y_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2gy}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}\right)dy=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{y_2} f(y,x,x')dy$$

Równanie EL: $$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial x'}=0$$

$$f(y,x')=\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}} \quad\rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial x'}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial x'}=const=C$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}}=C \quad\rightarrow\quad x'=\sqrt{\frac{y}{\frac{1}{C^2}-y}} \quad\rightarrow\quad x=\int\sqrt{\frac{y}{\frac{1}{C^2}-y}}dy$$

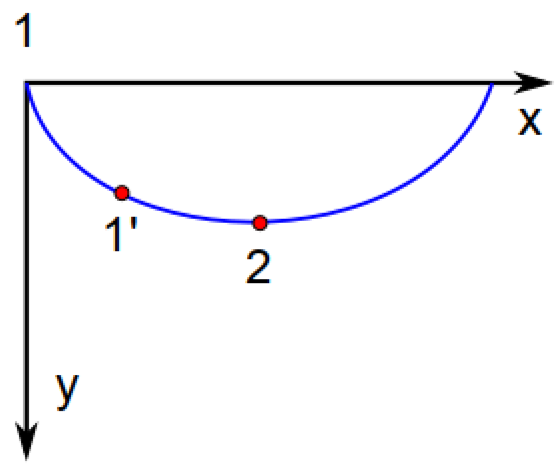
podstawienie

$$y=\frac{1}{2C^2}(1-\cos\theta) \quad\rightarrow\quad x=\frac{1}{2C^2}\int(1-\cos\theta)d\theta=\frac{1}{2C^2}(\theta-\sin\theta)+const$$

rozwiązanie w postaci parametrycznej

$$x(\theta) = \frac{1}{2C^2}(\theta - \sin\theta)$$

$$y(\theta) = \frac{1}{2C^2}(1 - \cos\theta)$$



czas trwania ruchu pomiędzy 1'-2 **(start z 1')**
jest identyczny jak dla 1-2 **(start z 1)**

ruch jest **izochroniczny** – nie zależy od amplitudy

np.: dla wahadła matematycznego drgania
są izochroniczne tylko dla małych kątów
wychyleń