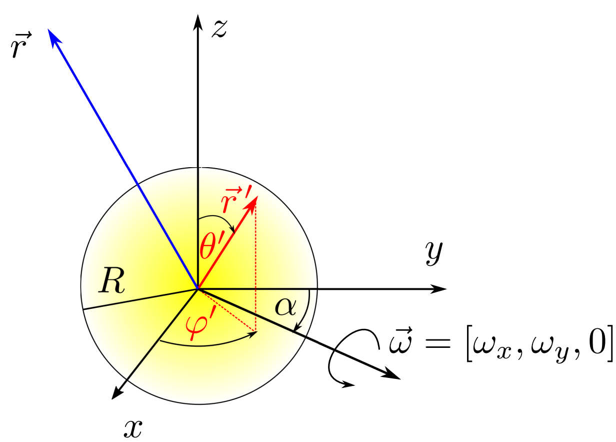
Projekt 6: modelowanie pola elektrycznego i magnetycznego w otoczeniu obracającej się naładowanej sfery

10 czerwca 2021

1 Wstęp

Na powierzchni sfery o promieniu R znajduje się ładunek o gęstości powierzchniowej σ. Sfera obraca się wokół osi leżącej w płaszczyźnie xy (rys.1). Na zajęciach wyznaczymy rozkład potencjału i pola elektrycznego oraz pola magnetycznego w jej otoczeniu.



Rysunek 1: Środek naładowanej sfery znajduje się w początku układu współrzędnych. Sfera obraca się wokół osi leżącej w płaszczyźnie xy.

1.1 Pole elektryczne

Skorzystamy z zasady superpozycji

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \tag{1}$$

Gęstość ładunku definujemy w postaci $\rho(\vec{r}') = \sigma \cdot \delta(r' - R)$ ($\sigma = const$) i wprowadzamy współrzędne sferyczne

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\infty} dr' \frac{sin\theta' r'^2 \sigma \delta(r'-R)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{sin\theta' R^2 \sigma}{|\vec{r}-\vec{R}'|} \tag{3}$$

gdzie:

$$\vec{r} \to \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \vec{R}\,' \to \begin{cases} R'_x = R\sin\theta'\cos\varphi' \\ R'_y = R\sin\theta'\sin\varphi' \\ R'_z = R\cos\theta' \end{cases} \tag{4}$$

Całkę (3) wyznaczymy numerycznie stosując złożenie dwóch kwadratur (2 wymiary) i wzór całkowy parabol (Simpsona). W tym celu na powierzchnii sfery wprowadzamy siatkę węzłów

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{N} \tag{5}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{M} \tag{6}$$

$$\theta \to \theta_i = \Delta\theta \cdot i, \quad i = 0, 1, \ldots, N \tag{7}$$

$$\varphi \to \varphi_j = \Delta\varphi \cdot j, \quad j = 0, 1, \ldots, M \tag{8}$$

a całkowanie zastępujemy sumowaniem

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta\theta}{3}\frac{\Delta\varphi}{3}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} a_i\, b_j\, \frac{\sin\theta'_i}{|\vec{r} - \vec{R}'_{ij}|} \tag{9}$$

Uwaga: $\vec{R}'_{i,j}$ oznacza że współrzędne R'_x, R'_y, R'_z zależą od pary indeksów $(i, j) \leftrightarrow (\theta'_i, \varphi'_j)$ zgodnie z wzorami (4).

Współczynniki a_i/b_j są określone następująco

$$a_i = \begin{cases} a_i = 1, & i = 0 \lor i = N \\ a_i = 4, & i \mod 2 = 1 \text{ (i nieparzyste)} \\ a_i = 2, & i \mod 2 = 0 \text{ (i parzyste)} \end{cases} \qquad b_j = \begin{cases} b_j = 1, & j = 0 \lor j = M \\ b_j = 4, & j \mod 2 = 1 \text{ (j nieparzyste)} \\ b_j = 2, & j \mod 2 = 0 \text{ (j parzyste)} \end{cases} \tag{10}$$

Podobnie możemy wyznaczyć numerycznie wektor pola elektrycznego

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{R^2\sigma\sin\theta'(\vec{r} - \vec{R}\,')}{|\vec{r} - \vec{R}\,'|^3} \tag{11}$$

po zastąpieniu całki sumą

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta\theta}{3}\frac{\Delta\varphi}{3}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} a_i\, b_j\, \frac{\sin\theta'_i\,(\vec{r} - \vec{R}'_{ij})}{|\vec{r} - \vec{R}'_{ij}|^3} \tag{12}$$

1.2 Pole magnetyczne

Na powierzchnii sfery rozłożony jest ładunek, gdy sfera obraca, generuje się prąd, który jest źródłem pola magnetycznego. Indukcję pola magnetycznego także wyznaczymy z zasady superpozycji

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,') \times \vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d^3r' \tag{13}$$

Gęstość prądu definiujemy jako

$$\vec{j}(\vec{r}\,') = \rho(\vec{r}\,')\vec{v}\,' = \sigma\delta(r' - R)\,\vec{\omega} \times \vec{r}\,' \tag{14}$$

wstawiamy ją do równania (13) a następnie wykonujemy całkowanie po zmiennej radialnej

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\sigma R^2 \sin\theta'(\vec{r} - \vec{R}\,') \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{R}\,'|^3} \tag{15}$$

Całkę liczymy numerycznie (analogicznie jak dla pola elektrycznego)

$$B_p(\vec{r}) = -\frac{\sigma R^2 \mu_0}{4\pi}\frac{\Delta\theta}{3}\frac{\Delta\varphi}{3}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} a_i\, b_j\, \frac{\sin\theta'_i\left[(\vec{r} - \vec{R}\,') \times (\vec{\omega} \times \vec{R}\,')\right] \cdot \hat{e}_p}{|\vec{r} - \vec{R}'_{ij}|^3}, \qquad p = x, y, z \tag{16}$$

2 Zadania do wykonania

1. Przyjmujemy następujące wartości parametrów: $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$, $R = 1$, $\sigma = 1$, $N = M = 201$, $\Delta\theta = \pi/N$, $\Delta\varphi = 2\pi/M$, $\vec{\omega} = [\omega_x, \omega_y, 0]$, $\omega_x = \omega \cdot \sin\alpha$, $\omega_y = \omega \cdot \cos\alpha$

2. Napisać funkcję obliczającą iloczyn wektorowy (jako wyznacznik) $\vec{c} \times \vec{d} = \vec{g}$:

   ```
   void iloczyn_wektorowy(double c[3], double d[3], double g[3])
   ```

   posłużymy się nią licząc składowe pola magnetycznego $\vec{B}$.

3. Wyznaczyć $V(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$ oraz $\vec{B}(\vec{r})$ dla $\vec{r} = (x, y, 0)$ w zakresie $x \in [-L, L]$, $y \in [-L, L]$, $L = 3.0$ z krokiem $\Delta x = \Delta y = 2L/K$, $K = 41$. Sporządzić mapę rozkładu potencjału $V(x, y, 0)$, wykres wektorowy $\vec{E}(x, y, 0)$ oraz wykres wektorowy $\vec{B}(x, y, 0)$ dla $\alpha = 0$ i $\alpha = \pi/4$. Ponadto proszę zrobić wykres $V(0, y, 0)$ i porównać z rozwiązaniem analitycznym.

3 Uwagi

Do wyznaczania wartości współczynników a_i oraz b_j można użyć funkcji

```
int wspolczynnik(int i, int N){
     int k;
     if(i==0 || i==N ) k=1;
     else if(i%2==1 ) k=4;
     else if(i%2==0 ) k=2;
     return k;
}
```

wówczas $a_i = wspolczynnik(i, N)$ lub $b_j = wspolczynnik(j, M)$.
Natomiast poniższy pseudokod pozwala wygenerować dane potrzebne do utworzenia wykresów

```
int wspolczynnik(int i, int N){
     int k;
     if(i==0 || i==N ) k=1;
     else if(i%2==1 ) k=4;
     else if(i%2==0 ) k=2;
}


 inicjalizacja parametrów:
 R, σ, Δθ, Δφ, Δx, Δy, L, α, ω⃗

 FOR x FROM -L TO L STEP Δx DO
    FOR y FROM -L TO L STEP Δy DO

        z=0
    //====  zerowanie zmiennych przed całkowaniem ============================
        v=0
        ex=0
        ey=0
        bx=0
        by=0
   //========= całkowanie ==================================================
    for i from 0 to N step 1 do
```

```
        for j from 0 to M step 1 do
```

$\theta_i' = \ldots$

$\varphi_j' = \ldots$

$x' = \ldots$

$y' = \ldots$

$z' = \ldots$

$|\vec{r}-\vec{r}'| = \ldots$

W=$\frac{\sigma R^2}{4\pi}\frac{\Delta\theta}{3}\frac{\Delta\varphi}{3}$

$v = v + W\, a_i\, b_j \sin\theta_i'/|\vec{r}-\vec{r}'|$

$ex = ex + W\, a_i\, b_j \sin\theta_i'(x - x_i')/|\vec{r}-\vec{r}'|^3$

$ey = ey + \ldots$

iloczyn_wektorowy($\vec{\omega}$, $\vec{r}'$, $\vec{g}^{(1)}$)

iloczyn_wektorowy($\vec{r}-\vec{r}'$, $\vec{g}^{(1)}$, $\vec{g}^{(2)}$)

$bx = bx + W\, a_i\, b_j \sin\theta_i'\, g_x^{(2)}/|\vec{r}-\vec{r}'|^3$

$by = by + W\, a_i\, b_j \sin\theta_i'\, g_y^{(2)}/|\vec{r}-\vec{r}'|^3$

```
        end do
      end do

      //===  zachowujemy obliczone wartości ====================================

          zapis do pliku: x,y,v,ex,ey,bx,by

      END DO
  END DO
```

Wykres wektorowy w Gnuplocie tworzymy poleceniem

```
plot 'dane.dat' u A:B:C:D w vectors
```

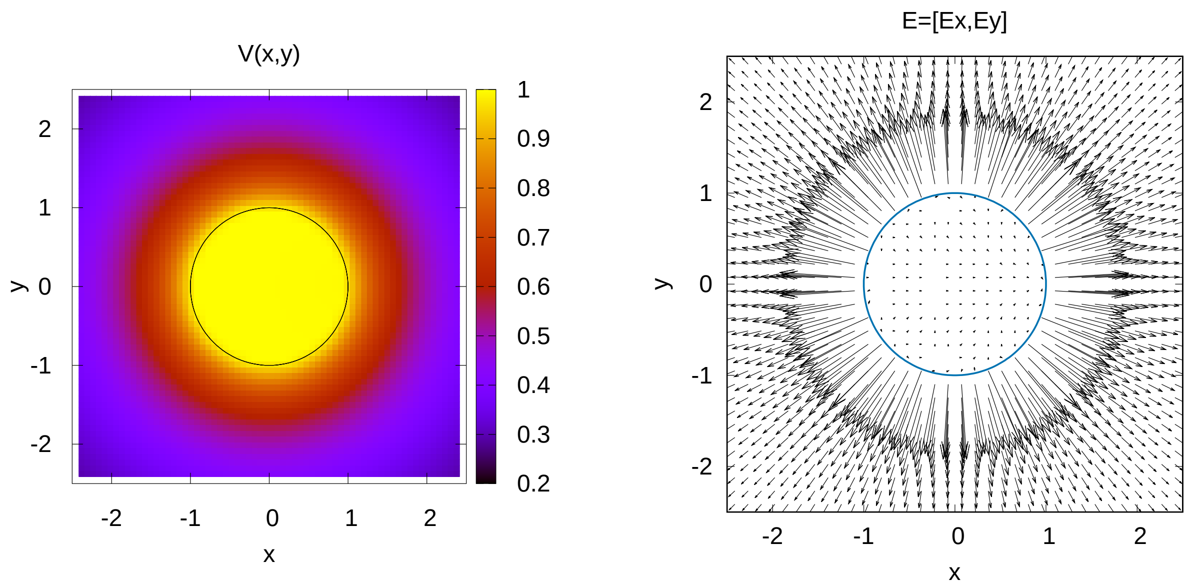
gdzie: A i B to numery kolumn w których zapisane są x i y, a w kolumnach C i D znajdują się składowe $x-owa$ i $y-owa$ pola wektorowego. W takim przypadku wektory (strzałki są zaczepione w węzłach siatki).

Wektory możemy skalować i zmieniać punkt zaczepnia (np. w środku wektora)

```
scale=5
plot 'dane.dat' u ($A-$C*scale/2):($B-$D*scale/2):($C*scale):($D*scale) w vectors
```

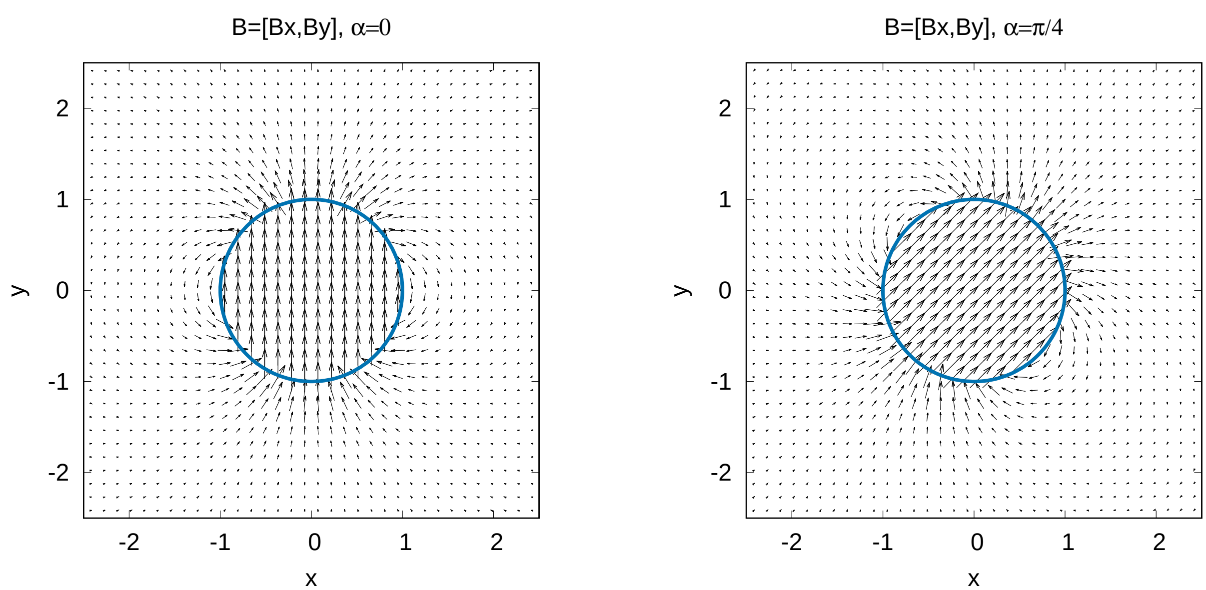
4 Przykładowe wyniki

(a) (b)



Rysunek 2: (a) Rozkład potencjału $V(x,y)$ oraz (b) pola elektrycznego $\vec{E} = [E_x, E_y]$ dla $z = 0$.

(a) (b)



Rysunek 3: Rozkład pola magnetycznego $\vec{B} = [B_x, B_y]$ dla $z = 0$ oraz: (a) $\alpha = 0$ i (b) $\alpha = \pi/4$