

Projekt 3: ruch cząstki w polu magnetycznym

4 stycznia 2019

1 Wstęp

Na zajęciach rozważaliśmy ruch cząstki naładowanej w jednorodnym polu magnetycznym. Lagranżjan układu we współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{q}{2} \dot{\vec{r}} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \quad (1)$$

Jeśli wprowadzimy współrzędne cylindryczne z osią 'z' skierowaną w kierunku pola B, to funkcja Hamiltona zapisana w nowych współrzędnych będzie miała postać

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) - \frac{qB}{2m} p_\varphi + \frac{q^2 B^2}{8m} r^2 \quad (2)$$

Z niej możemy wydobyc równania ruchu

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \quad (3)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2} - \frac{qB}{2m} \quad (4)$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m} \quad (5)$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{m r^3} - \frac{q^2 B^2 r}{4m} \quad (6)$$

$$\dot{p}_\varphi = 0 \quad (7)$$

$$\dot{p}_z = 0 \quad (8)$$

Analogicznie jak na poprzednich zajęciach wprowadzamy nowe zmienne

$$s_0 = r \quad (9)$$

$$s_1 = \varphi \quad (10)$$

$$s_2 = z \quad (11)$$

$$s_3 = p_r \quad (12)$$

$$s_4 = p_\varphi \quad (13)$$

$$s_5 = p_z \quad (14)$$

i określamy ich pochodne

$$\dot{s}_0 = f_0(t, \vec{s}) = \frac{s_3}{m} \quad (15)$$

$$\dot{s}_1 = f_1(t, \vec{s}) = \frac{s_4}{m s_0^2} - \frac{qB}{2m} \quad (16)$$

$$\dot{s}_2 = f_2(t, \vec{s}) = \frac{s_5}{m} \quad (17)$$

$$\dot{s}_3 = f_3(t, \vec{s}) = \frac{s_4^2}{m s_0^3} - \frac{q^2 B^2 s_0}{4m} \quad (18)$$

$$\dot{s}_4 = f_4(t, \vec{s}) = 0 \quad (19)$$

$$\dot{s}_5 = f_5(t, \vec{s}) = 0 \quad (20)$$

Wartości wektora $\vec{f}(t, \vec{s})$ wyrażone wzorami (15)-(20) wyliczamy w procedurze do liczenia pochodnych, którą wykorzystujemy w metodzie RK4 (procedura *rk4_vec*).

1.1 Warunki początkowe

Warunki początkowe zadane dla równania różniczkowego określają jednoznacznie jego rozwiązanie. Zastanówmy się jaki szczególnie interesujące przypadki możemy zamodelować. Ponieważ w funkcji Hamiltona nie występuje zmienna φ więc **pęd uogólniony** p_φ z nią sprzężony będzie całką ruchu

$$\dot{p}_\varphi = 0 \Rightarrow p_\varphi = \text{const} \quad (21)$$

wykorzystajmy tę informację do znalezienia WP dla trajektorii w postaci okręgu o środku w punkcie $(x, y) = (0, 0)$. Wówczas $r = \text{const}$ skąd od razu dostajemy dwa warunki:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} = 0 \Rightarrow p_r = 0 \quad (22)$$

oraz

$$\dot{p}_\varphi = \frac{p_\varphi^2}{m r^3} - \frac{q^2 B^2 r}{4m} = 0 \Rightarrow p_\varphi^2 = \frac{q^2 B^2 r^4}{4} \quad (23)$$

Na podstawie drugiego warunku określimy p_φ

$$p_\varphi = \pm \frac{q B r^2}{2} \quad (24)$$

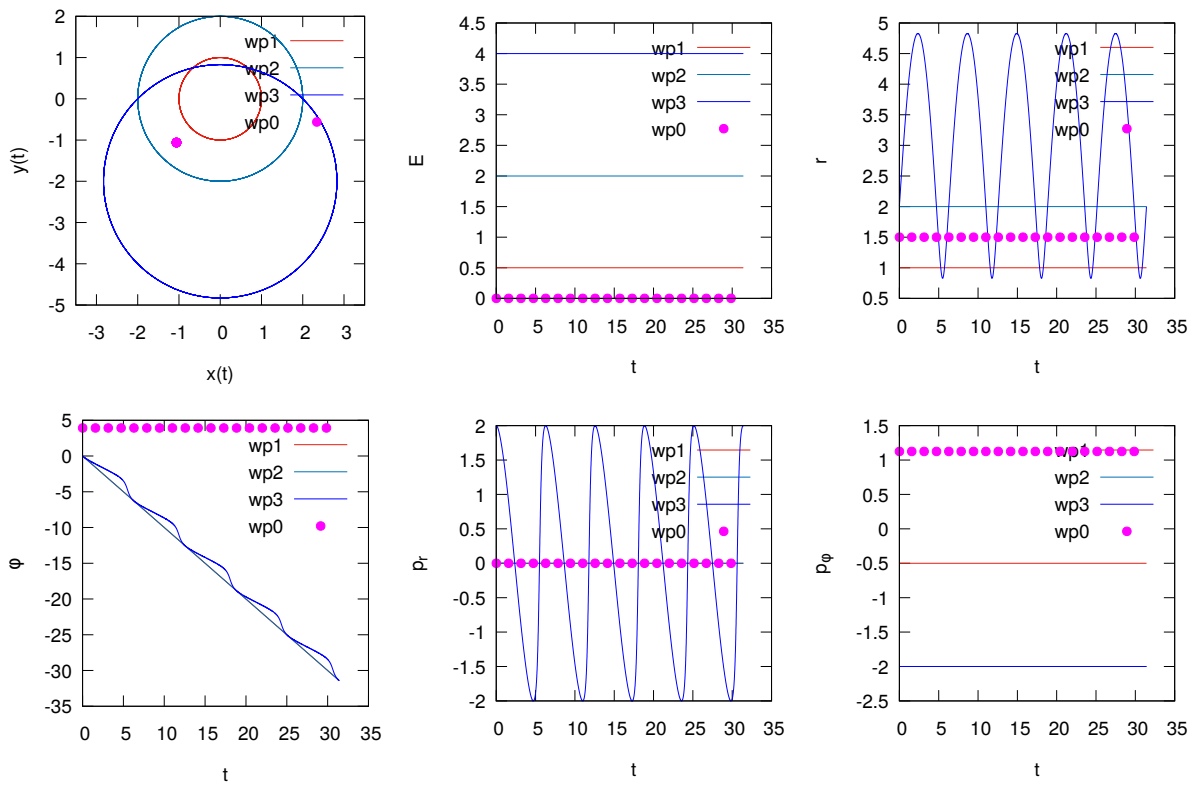
Pojawiają się więc dwie opcje.

- Dla $p_\varphi = +\frac{q B r^2}{2}$ na mocy wzoru (4) dostajemy warunek $\dot{\varphi} = 0$, czyli cząstka nie porusza się.
- Dla $p_\varphi = -\frac{q B r^2}{2}$ dostajemy $\dot{\varphi} = -\frac{q B}{m} = -\omega_c$, czyli cząstka porusza się po trajektorii kołowej z częstością cyklotronową ω_c (niezależnie od długości wektora wodzącego $r = \text{const}$).

2 Zadania do wykonania

1. Napisać program do wyznaczenia trajektorii cząstki naładowanej w polu magnetycznym wykorzystując metodę RK4 (procedura *rk4_vec*).
2. Przyjąć parametry symulacji: $n = 6$ (liczba zmiennych niezależnych), $n_t = 5000$ (liczba kroków czasowych), $\omega_c = q B/m$, $q = B = m = 1$, $T = 2\pi/\omega_c$ (okres obiegu zamkniętej orbity cząstki), $\Delta t = 5 \cdot T/n_t$ (krok czasowy).
3. Znaleźć trajektorie dla następujących warunków początkowych:
 - 0) (bezruch) $r_0 = 1.5$, $\varphi_0 = 1.25 \cdot \pi$, $z_0 = 0$, $p_{r0} = 0$, $p_{\varphi 0} = q B r_0^2/2$, $p_{z0} = 0$
 - 1) (okrąg centrowany w początku ukł. wsp.) $r_0 = 1$, $\varphi_0 = 0$, $z_0 = 0$, $p_{r0} = 0$, $p_{\varphi 0} = -q B r_0^2/2$, $p_{z0} = 0$
 - 2) (okrąg centrowany w początku ukł. wsp. - niezależność od r) $r_0 = 2$, $\varphi_0 = 0$, $z_0 = 0$, $p_{r0} = 0$, $p_{\varphi 0} = -q B r_0^2/2$, $p_{z0} = 0$
 - 3) (okrąg zorientowany dowolnie) $r_0 = 2$, $\varphi_0 = 0$, $z_0 = 0$, $p_{r0} = 2$, $p_{\varphi 0} = -q B r_0^2/2$, $p_{z0} = 0$
4. W sprawozdaniu przedyskutować uzyskane wyniki.

2.1 Przykładowe wyniki



Rysunek 1: Wyniki dla warunków początkowych: 0,1,2,3