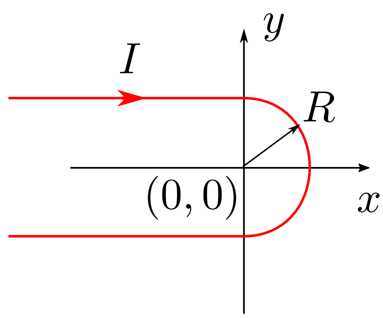
Podstawy fizyki teoretycznej.

Zestaw 6: elektrodynamika, zasada superpozycji, prawo Biota-Savarta, metoda obrazów.

(zadania do samodzielnego rozwiązania)

25 kwietnia 2022

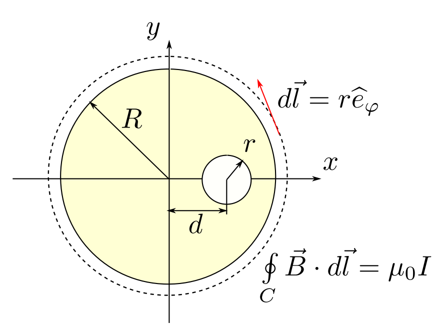
1. Nieskończenie długi przewodnik został zagięty w sposób pokazany na rysunku 1. Wyznaczyć indukcję pola magnetycznego w punkcie $\vec{P} = [0, 0, 0]$ - przewodnik leży w płaszczyźnie xy.



Rysunek 1: Zagięty przewodnik.

Wskazówka: Podzielić przewodnik na trzy odcinki (dwa prostoliniowe oraz półokrąg), wyznaczyć z prawa Biota-Savarta wkłady do $\vec{B}$ i dodać je do siebie. Całkowanie po półokręgu wykonać we współrzędnych cylindrycznych.

2. Przez długi przewodnik o przekroju kołowym (promień R) płynie prąd o natężeniu I w kierunku z (rysunek 2). Wewnątrz przewodnika wydrążono cylindryczny otwór również o przekroju kołowym (promień r). Środek otworu jest przesunięty względem osi przewodnika o odległość d. Korzystając z zasady superpozycji wyznaczyć indukcję pola magnetycznego w wydrążonym otworze.

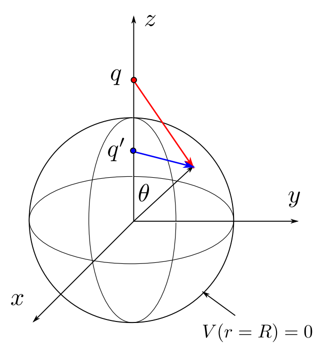


Rysunek 2: Przekrój przewodnika z wnęką.

Wskazówka: Należy skorzystać z zasady superpozycji. Pustą wnękę (brak prądu) możemy potraktować jako superpozycję dwóch prądów mających przeciwne zwroty.

- Najpierw rozpatrzyć przewodnik bez wnęki, zapisać dwa równania Maxwella dla przewodnika ($r < R$), $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ oraz $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, we współrzędnych cylindrycznych. Wykorzystać informację o symetrii układu w celu określenia składowych B_ρ, B_φ, B_z od zmiennych ρ, φ, z.
- równanie różniczkowe na składową B_φ można scałkować po rozdzieleniu zmiennych, stałą całkowania można określić porównując rozwiązanie w środku z rozwiązaniem na zewnętrz, gdzie korzystamy z $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ - dla $r = R$.
- znalezione rozwiązanie dla pełnego przewodnika wykorzystujemy do opisu pola we wnęce z przeciwnym zwrotem prądu
- przejść z układu cylindrycznego do kartezjańskiego wyrażając $\widehat{e}_\varphi$ za pomocą $\widehat{e}_x$ i $\widehat{e}_y$ oraz $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (przewodnik) i $\rho = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$ (wnęka)
- wynik: we wnęce pole B jest jednorodne

3. Ładunek punktowy q umieszczono w pobliżu metalowej uziemionej sfery (rys. 3). Korzystając z metody obrazów należy znaleźć położenie i wartość ładunku indukowanego. Rozważania przeprowadzić w sferycznym układzie odniesienia. Określić rozkład rzeczywistego ładunku zgromadzonego na powierzchnii sfery oraz wyznaczyć jego całkowitą ilość.



Rysunek 3: Ładunek q w pobliżu uziemionej ($V(R) = 0$) metalowej sfery.

Wskazówki:

- Potencjał na sferze jest ustalony $V(r = R) = 0$, zatem obraz ładunku (q') powinien znajdować się wewnątrz tak aby superpozycja potencjałów $V_q + V_{q'} = 0$ na powierzchnii odtwarzała ten warunek. Warunek ten powinien być spełniony dla dowolnego kąta biegunowego θ i azymutalnego φ, odpowiednio przekształcając wzory na potencjał można określić wartość obrazu ładunku (powienien mieć przeciwny znak niż q) i jego położenie.
- Prawo Gaussa mówi $\varepsilon_0 \oint\limits_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = q = \int\limits_\Sigma \sigma d\Sigma$, gdzie σ to poszukiwany rozkład rzeczywistego ładunku indukowanego na powierzchnii sfery. Na powierzchnii sfery wektor normalny jest skierowany radialnie $d\vec{\Sigma} = \vec{n} d\Sigma = \widehat{e}_r d\Sigma$, skąd otrzymujemy związek $\varepsilon_0 \oint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \int\limits_\Sigma E d\Sigma$. Ponieważ szukamy $\sigma^{'}$ więc z porównania wynika że $\sigma^{'} = \varepsilon_0 E_r^{'}$ (E_r to radialna składowa pola elektrycznego).
- Mając $\sigma^{'}$, wyznaczamy $q^{'} = \int\limits_\Sigma \sigma^{'} d\Sigma$, element powierzchnii we współrzędnych sferycznych $d\Sigma = R \sin(\varphi) d\theta \cdot R d\theta$