Podstawy fizyki teoretycznej.

Zestaw 4: formalizm Hamiltona, nawiasy Poissona.

24 kwietnia 2020

1. Dany jest potencjał uogólniony w postaci:

$$U(\vec{r},\vec{v}) = q\varphi(\vec{r}) - q\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\vec{v} \tag{1}$$

gdzie: q jest ładunkiem cząstki, $\vec{A}(\vec{r},t)$ jest potencjałem wektorowym cząstki naładowanej w polu magnetycznym

$$\nabla\times\vec{A} = \vec{B} \tag{2}$$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ jest prędkością cząstki, a φ jest potencjałem skalarnym.

- zapisać funkcję Lagrange'a w układzie kartezjańskim zachowując zapis wektorowy tj. $\vec{r}$ i $\dot{\vec{r}}$, następnie wyznaczyć: wektor pędu uogólnionego $\vec{P}$ (wyjdzie $\vec{P} = \vec{p} + q\vec{A}$, gdzie: $\vec{p} = m\vec{V}$ to pęd cząstki, a $\vec{P}$ możemy określić jako *pseudopęd*),
- wyznaczyć funkcję Hamiltona nadal korzystając z zapisu wektorowego
- wyznaczyć 2 wektorowe równania ruchu Hamiltona
  Uwaga: dzięki zapisowi wektorowemu możemy znacznie uprościć rozważania

$$-\dot{\vec{P}} = \left[\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial H}{\partial y},\frac{\partial H}{\partial z}\right] = \frac{\partial H}{\partial\vec{r}} = \vec{\nabla}H \tag{3}$$

- korzystając z tożsamości

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{V}) = \vec{A}\times\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{V}}_{=0}+\vec{V}\times\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{A}}_{=\vec{B}}+(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+\underbrace{(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}}_{=0} \tag{4}$$

  (ponieważ $\vec{V}$ nie zależy od $\vec{r}$ więc dla dowolnej zmiennej r_i mamy $\frac{\partial\vec{V}}{\partial r_i} = 0$) oraz

$$\vec{V}\cdot\vec{\nabla} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dt} - \frac{\partial}{\partial t} \tag{5}$$

  przekształcić równanie ruchu dla $\dot{\vec{P}}$ do postaci, w której pojawi się w jawnie siła Lorentza i wektor natężenia pola elektrycznego $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$. Uzyskane wyrażenie porównać z równaniem ruchu w formalizmie Newtona.

2. Korzystając z wyniku zadania (1) (równania ruchu Hamiltona dla $\dot{\vec{r}}$ i $\dot{\vec{P}}$) proszę wyznaczyć trajektorię cząstki naładowanej w jednorodnym polu magnetycznym. Potencjał wektorowy przyjmujemy w postaci niesymetrycznej (Landaua):

$$\vec{A} = B[-y,0,0], \quad B = const \tag{6}$$

Wskazówka: określić całkę ruchu (p_x) a następnie wykorzystać ją do zmiany zmiennej ($y\to s$) $\frac{p_x}{m} + \frac{qB}{m}y = s$, dalej całkowanie równania ruchu jest już proste.

3. Cząstka porusza się w polu siły centralnej o potencjale parabolicznym

$$U(r) = \alpha(x^2+y^2) \tag{7}$$

Wyznaczyć nawias Poissona (H, j_z), gdzie j_z jest z-ową składową momentu pędu.

4. Zapisać funkcję Hamiltona cząstki swobodnej w układzie kartezjańskim a następnie wyznaczyć nawiasy Poissona (j_x, j_y),(j_y, j_z),(j_z, j_x).

5. Dwie cząstki o masach $m_1 = m_2 = m$ oddziałują z potencjałem izotropowego oscylatora harmonicznego

$$U_i(\vec{r}_i) = \frac{k}{2}\vec{r}_i^{\,2}, \qquad k > 0 \tag{8}$$

potencjał oddziaływania międzycząstkowego zależny jest jedynie od ich wzajemnej odległości $U_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$.

- zapisać lagranżjan układu we współrzędnych kartezjańskich
- wprowadzić współrzędne środka masy (CM) $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$ i ruchu względnego (rel) $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ i dokonać transformacji lagranżjanu $L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = L(\vec{r}, \vec{R}, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}})$ co powinno skutkować separacją $L = L_{CM} + L_{rel}$
- w L_{CM} i L_{rel} wprowadzić współrzędne sferyczne, wyznaczyć równania ruchu i określić całki ruchu