Podstawy fizyki teoretycznej.
Zestaw 4: formalizm Lagrange'a i Hamiltona (transformacja Legendre'a, zmienne cykliczne, całki ruchu, potencjał wektorowy) - przykładowe rozwiązania

24 kwietnia 2020

Uwaga: poniżej znajdują się treści kolejnych zadań natomiast ich rozwiążania są podne na kolejnych stronach.

1. Cząstka o masie m porusza się w płaszczyżnie xy po krzywej $y = y(x)$ (więzy). Na cząstkę działa siła grawitacyjna $\vec{F} = [0, -mg]$.

   - korzystając z formalizmu Newtona zapisać równanie ruchu, w którym zmienną niezależną będzie długość drogi s jaką przebywa cząstka a następnie należy je przekształcić do postaci zależnej od

   $$x,\ \dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},\ y^{'} = \frac{dy}{dx},\ y^{''} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{1}$$

   - zapisać lagranżjan i wyprowadzić równania ruchu, które należy porównać z równaniem Newtona
   - wyznaczyć funkcję Hamiltona i odpowiednie równania ruchu, porównać je z równaniem Newtona

2. W formalizmie Newtona na cząstkę o ładunku elektrycznym q poruszającą się z prędkością $\vec{V}$ w polu magnetycznym $\vec{B}$ działa siła Lorentza $\vec{F}_L$, którą opisujemy wzorem

   $$\vec{F}_L = q\vec{V} \times \vec{B} \tag{2}$$

   W formalizmie Lagrange'a i Hamiltona, w których funkcje L i H mają wymiar energii, pojęcie siły nie pojawia się w sposób jawny. Oddziaływanie cząstki z polem magnetycznym opisuje uogólniony potencjał (który nie jest jednak energią potencjalną, z prostego powodu - siła magnetyczna nie wykonuje pracy)

   $$U(\vec{r}, \vec{v}) = -q\,\vec{A} \cdot \vec{v} \tag{3}$$

   gdzie: $\vec{v}$ to wektor prędkości, $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = [A_x(\vec{r}), A_y(\vec{r}), A_z(\vec{r})]$ jest potencjałem wektorowym. Potencjał wektorowy nie jest wielkością mierzalną, jednak jest ściśle związany z indukcją pola magnetycznego $\vec{B}$ relacją

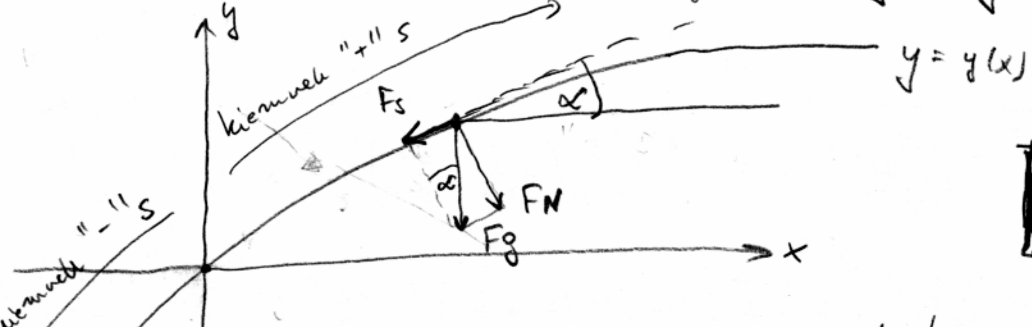
   $$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{4}$$

   - Dla potencjału wektorowego w postaci symetrycznej

   $$\vec{A} = \frac{B}{2}[-y, x, 0] \tag{5}$$

     określić wektor $\vec{B}$
   - zapisać lagranżjan cząstki w polu magnetycznym w układzie kartezjańskim, wygenerować równania ruchu, określić pędy uogólnione, znaleźć całki ruchu
   - znaleźć rozwiązania równań ruchu operując na zmiennych x i y, dla założonych warunków początkowych ($t = 0$): $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\dot{x}(0) = V_{x,0}$, $\dot{y}(0) = V_{y,0}$,
   - znaleźć rozwiązanie równań ruchu transformując układ równań różniczkowych $(\ddot{x}, \ddot{y})$ do pojedynczego równania dla zmiennej zespolonej $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, gdzie $i = \sqrt{-1}$

zad. 1 Cząstka porusza się po krzywej $y = y(x)$ ← równanie więzów



Formalizm Newtona

F_N - składowa normalna do toru → nie zmienia prędkości

F_s - składowa styczna do toru (drogi s) → odpowiada za dynamikę cząstki

z rysunku: $\boxed{F_s = - F_g \cdot \sin\alpha}$ ← minus "−" ponieważ dla $\alpha > 0$ F_s jest skierowane w stronę "ujemnego" s

droga **s**: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

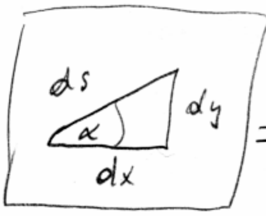
$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

$$\boxed{s = \int ds = \int dx \sqrt{1 + y'^2}}$$

Uwaga:
$y = y(x)$
$y' = \frac{d\,y(x)}{dx} = y'(x)$

nachylenie krzywej: $\frac{dy}{dx} = tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \frac{dy}{dx}$$



$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}}$$

$$\boxed{F_s = - F_g \sin\alpha = - mg \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}}$$

oraz II zasada dynamiki

$$\boxed{F_s = m\ddot{s}}$$ ← Siła F_s przyśpiesza ciało wzdłuż drogi s

Wyraźmy $\ddot{s}$ za pomocą $x, \dot{x}$ i $\ddot{x}$:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{x} + \left(\frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}\right)^2} = \dot{x}\sqrt{1 + y'^2}$$

$$\ddot{S} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d}{dt}\,\dot{x}\left[1 + (y'(x))^2\right]^{\frac{1}{2}} = \ddot{x}\left[1 + y'^2\right]^{\frac{1}{2}} + \dot{x}\,\frac{1}{2}\left[1 + y'^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y' \cdot \frac{dy'}{dt} =$$

$$\ldots = \left\{ \frac{d}{dt}\,y' = \frac{dy'}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \dot{x}\,\frac{d^2y}{dt^2} = \dot{x}\,y'' \right\} = \ldots$$

$$\ldots = \ddot{x}\sqrt{1 + y'^2} + \frac{\dot{x}^2\,y'\,y''}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Podstawiamy:

$$F_s = -mg\,\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = m\ddot{s} = m\ddot{x}\sqrt{1 + y'^2} + m\dot{x}^2\,\frac{y'\,y''}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

obustronnie mnożymy przez $\sqrt{1 + y'^2}$

i dostajemy:

$$\boxed{-mg\,y' = m\ddot{x}\left(1 + y'^2\right) + m\dot{x}^2\,y'\,y''}$$

równanie ruchu – wynik uzyskany z równania Newtona
(zależy od $x, \dot{x}, \ddot{x}$)

$$\boxed{\text{Formalizm Lagrange'a}}$$

$$\boxed{L = T - U}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + y'^2)$$

$$U = m \cdot g \cdot y(x)$$

$$\boxed{L = \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + y'^2) - mgy}$$

$$\boxed{L = L(x, \dot{x})}$$

równanie ruchu

$$\boxed{p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}(1 + y'^2)}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}(1 + y'^2) + m\dot{x}^2 2y'y''$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \cdot 2y' \cdot y'' - mgy'}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0}$$

$$m\ddot{x}(1 + y'^2) + 2m\dot{x}^2 y'y'' - m\dot{x}^2 y'y'' + mgy' = 0$$

po przekształceniu otrzymamy

$$\boxed{-mgy' = m\ddot{x}(1 + y'^2) + m\dot{x}^2 y' y''}$$

równanie ruchu identyczne jak w formalizmie Newtona

$$\boxed{\text{Formalizm Hamiltona}}$$

$$\boxed{H = \dot{x} \cdot p_x - L}$$

$$p_x = m\dot{x}(1 + y'^2) \Rightarrow \boxed{\dot{x} = \frac{p_x}{m(1 + y'^2)}}$$

$$H = \frac{p_x^2}{m(1 + y'^2)} - \frac{m}{2}\left[\frac{p_x}{m(1 + y'^2)}\right]^2 (1 + y'^2) + mgy$$

$$\boxed{H = \frac{p_x^2}{2m(1 + y'^2)} + mgy}$$

Równania ruchu

① $\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}_x}$ ② $\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_x} = \dot{x}}$

①

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{p_x^2}{2m}(-1)(1+y'^2)^{-2}\cdot 2y'y'' + mgy' = -\dot{p}_x$$

$$\boxed{\dot{p}_x = \frac{p_x^2 \cdot y'y''}{m(1+y'^2)^2} - mgy'}$$

②

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m(1+y'^2)} = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_x = m\dot{x}(1+y'^2)}$$

$$\dot{p}_x = \frac{d}{dt}p_x = m\ddot{x}(1+y'^2) + m\dot{x}^2\, 2y'y''$$

Wynik z ② (p_x i $\dot{p}_x$) wstawiamy do wyniku z ①

$$m\ddot{x}(1+y'^2) + m\dot{x}^2\, 2y'y'' = \frac{m^2\dot{x}^2\cancel{(1+y'^2)^2}\, y'y''}{\cancel{m}\cancel{(1+y'^2)^2}} - mgy'$$

$$\boxed{m\ddot{x}(1+y'^2) + m\dot{x}^2 y'y'' = -mgy'}$$

→ równanie ruchu identyczne jak w formalizmie Newtona

1 Zad 2

Dany jest lagranżjan $\boxed{L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + q\vec{A}\cdot\vec{v}}$

$\vec{A}$ – potencjał wektorowy w postaci symetrycznej

$$\boxed{\vec{A} = \frac{B}{2}[-y, x, 0]}$$

z więzek $\vec{A}$ z indukcją pola magnetycznego

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times A}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\ +\hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\ +\hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \end{array}$$

Podstawiamy

$$\vec{B} = \hat{i}(0-0) + \hat{j}(0-0) + \hat{k}\left(\frac{B}{2} + \frac{B}{2}\right) = \hat{k}\,B$$

$\vec{B} = [0, 0, B]$ ← pole skierowane wzdłuż osi "z" i jest jednorodne

Wniosek: oczekujemy że w płaszczyźnie xy cząstka będzie się poruszać po trajektorii kołowej oraz ruchem jednostajnym wzdłuż osi "z"

$\vec{v} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$ wstawiamy do L

$$\boxed{L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q\frac{B}{2}(-y\cdot\dot{x} + x\cdot\dot{y})}$$ ← lagranżjan

równanie ruchu

(1) $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{qB}{2}\dot{y}$ $\qquad$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{qB}{2}y = p_x$

(2) $\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{qB}{2}\dot{x}$ $\qquad$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{qB}{2}x = p_y$

(3) $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = p_z$

(3) Ponieważ $\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot z} = \frac{d}{dt} p_z = 0 \Rightarrow \boxed{p_z = const}$

p_z jest całką ruchu a z jest zmienną cykliczną

Wniosek: zgodnie z naszymi oczekiwaniami cząstka porusza się w kierunku równoległym do $\vec{B}$ ruchem jednostajnym

równania Eulera-Lagrange'a dla (1) i (2)

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot y} = 0$$

$$\underbrace{\frac{qB}{2}\dot y - m\ddot x + \frac{qB}{2}\dot y = 0} \qquad \underbrace{-\frac{qB}{2}\dot x - m\ddot y - \frac{qB}{2}\dot x = 0}$$

$$\ddot x = \frac{qB}{m}\dot y \qquad \ddot y = -\frac{qB}{m}\dot x$$

$\boxed{\frac{qB}{m} = \omega_c}$ - częstość cyklotronowa (zależy od 3 stałych)

$$\begin{cases} \ddot x = \omega_c \cdot \dot y \\ \ddot y = -\omega_c \dot x \end{cases} \Leftarrow \text{układ 2 równań różniczkowych}$$

całkujemy 1 równanie po czasie

$$\int \ddot x \, dt = \int \omega_c \dot y \, dt \Rightarrow \boxed{\dot x = \omega_c \cdot y + C^{\,\text{"const}}}$$

$\dot x$ wstawiamy do 2 równania!

$$\ddot y = -\omega_c(\omega_c y + C) = -\omega_c^2 y - \omega_c \cdot C \Leftarrow \text{równanie niejednorodne}$$

$\boxed{\ddot y = -\omega_c^2 y}$ $\Leftarrow$ szukamy rozwiązania rów. jednorodnego

$$y(t) = A\cos(\omega_c t + \delta)$$

Rozwiązanie równania niejednorodnego proponujemy w postaci

$$\boxed{y(t) = A\cos(\omega_c \cdot t + \delta) + D} \qquad D = const$$

po wstawieniu do równania otrzymamy

$$-A\omega_c^2 \cancel{\cos(\omega_c \cdot t + \delta)} = -A\omega_c^2 \cancel{\cos(\omega_c t + \delta)} - \omega_c^2 D - \omega_c C \Rightarrow \boxed{D = -\frac{C}{\omega_c}}$$

Szukamy rozwiązania $x(t)$:

$$\dot x = \omega_c \cdot y + C = \omega_c A\cos(\omega_c t + \delta) + \cancel{\omega_c \cdot D} - \cancel{\omega_c D}$$

$$x(t) = \int \dot x \, dt = -A\sin(\omega t + \delta) + E$$

Otrzymaliśmy:

$$\begin{cases} x(t) = -A\sin(\omega_c t+\delta) + E \\ y(t) = A\cos(\omega_c t+\delta) + D \end{cases}$$

Równanie okręgu: $(x-X)^2 + (y-X)^2 = R^2$

jeśli $E = X$ i $D = Y$ to:

$$(x-X)^2 + (y-Y)^2 = A^2\sin^2(\omega_c t+\delta) + A^2\cos^2(\omega_c t+\delta) = A^2 = R^2$$

$\boxed{A = R}$ – promień okręgu

Jeśli uwzględnimy warunki początkowe $(t=0)$
czyli $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ i $\dot{x}(0) = V_{x0}$, $\dot{y}(0) = V_{y0}$
to określimy wartości stałych: X, Y, δ, R

Położenie:

$$\begin{cases} (1)\ x_0 = x(0) = -A\sin(\delta) + X \\ (2)\ y_0 = y(0) = A\cos(\delta) + Y \end{cases}$$

Prędkości:

$$\begin{cases} (3)\ V_{x0} = \dot{x}(0) = -A\cdot\omega_c\cdot\cos(\delta) \\ (4)\ V_{y0} = \dot{y}(0) = -A\,\omega_c\cdot\sin(\delta) \end{cases}$$

z (3) i (4) wyznaczamy fazę:

$$\begin{cases} \cos(\delta) = -\dfrac{V_{x0}}{R\cdot\omega_c} \\ \sin(\delta) = -\dfrac{V_{y0}}{R\cdot\omega_c} \end{cases}$$

$$\boxed{\delta = \arccos\left(-\frac{V_{x0}}{R\cdot\omega_c}\right)}$$

i wstawiamy do (1) i (2) + $\boxed{A = R}$:

$$x_0 = -R\left(-\frac{V_{y0}}{R\cdot\omega_c}\right) + X \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = x_0 - \frac{V_{y0}}{\omega_c}}$$

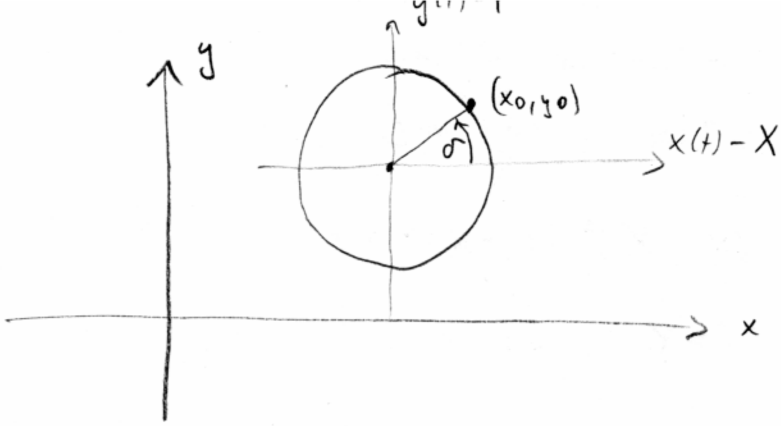
$$y_0 = R\left(-\frac{V_{x0}}{R\cdot\omega_c}\right) + Y \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y = y_0 + \frac{V_{x0}}{\omega_c}}$$

współrzędne środka okręgu

Znamy $\vec{V}_0$ więc z (3) i (4) dostaniemy zależność na R:

$$V_0^2 = \vec{V}_0^2 = V_{x0}^2 + V_{y0}^2 = R^2\omega_c^2\cos^2(\delta) + R^2\omega_c^2\sin^2(\delta) = \omega_c^2\cdot R^2$$

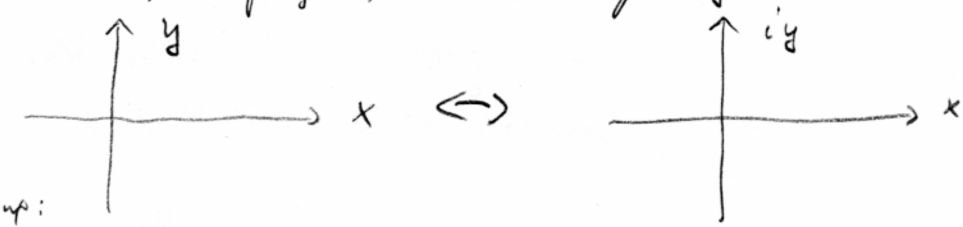
$$\boxed{R = \frac{V_0}{\omega_c}} \qquad \boxed{R = \frac{V_0\cdot m}{q\cdot B}}$$



Uwaga: Fazę δ określamy w układzie współrzędnych związanym ze środkiem okręgu.

Układ równań: można rozwiązać przy użyciu liczb zespolonych

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \cdot \dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = -\omega_c \cdot \dot{x} & (2) \end{cases}$$



Wprowadzamy nową zmienną:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

dodajemy (1) + i (2): $\ddot{x} + i\ddot{y} = \omega_c \dot{y} - i\omega_c \dot{x} = -i\omega_c(\dot{x} + i\dot{y})$

$$\boxed{\ddot{z} = -i\omega_c \dot{z}}$$ równanie różniczkowe jednej zmiennej

całkujemy po czasie:

$$\boxed{\dot{z} = -i\omega_c z + C}$$ ← równanie niejednorodne

równanie jednorodne: $\dot{z} = -i\omega_c z$

Separacja zmiennych: $\frac{dz}{z} = -i\omega_c \, dt \xrightarrow{\text{całkowanie}} \ln z = -i\omega_c t + D$

$$z = e^{-i\omega_c t + D}$$

D - liczba zespolona, więc możemy ją zapisać

$$e^D = e^{Re\{D\} + i\, Im\{D\}} = A \cdot e^{-i\delta}$$

rozwiązanie równania jednorodnego:

$$\boxed{z_j(t) = Ae^{-i\omega_c t - \delta}}$$

rozwiązanie równania niejednorodnego proponujemy w postaci

$$z_n(t) = z_j(t) + Z \qquad Z = X + iY = const$$

$$z_n(t) = z_j + Z = A e^{-i\omega_c t + \delta} + X + iY = x(t) + i\,y(t)$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_c t + \delta) + X \\ y(t) = -A\sin(\omega_c t + \delta) + Y \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie okręgu o promieniu A i środku (X, Y)

stałe A, δ, X, Y wyznaczamy z warunków początkowych.