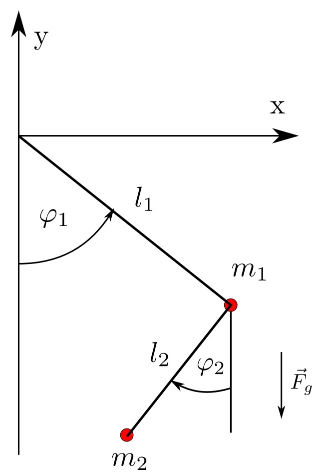
Podstawy fizyki teoretycznej

Zestaw 3: formalizm Lagrange'a i Hamiltona (układ dwóch ciał, zmienne cykliczne, całki ruchu) - problemy do samodzielnego rozwiązania

15 kwietnia 2020

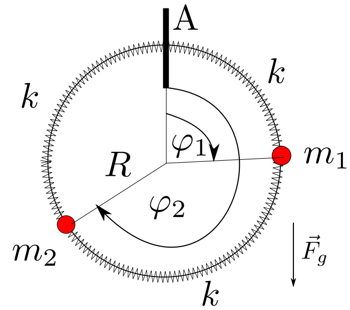
1. Na rysunku 1 pokazany jest układ podwójnego wahadła, które stanowią dwie masy m_1 i m_2 zawieszone są na sztywnych nieważkich niciach o długościach l_1 i l_2. Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym skierowanym pionowo w dół. Należy zapisać lagranżjan układu i wygenerować równania ruchu. Ponieważ równania będą nieliniowe nie znajdziemy ich rozwiązań dla tak ogólnego przypadku.
   Dla zainteresowanych:
   Aby znaleźć rozwiązania dla przypadku szczególnego przyjmujemy: $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$. Zakładając małe kąty wychyleń po wygenerowaniu równań ruchu przyjmujemy: $cos(\varphi_1 - \varphi_2) \approx 1$ (rozwinięcie w szereg Taylora, drugi i kolejne wyrazy są zaniedbywalne) oraz $\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 sin(\varphi_1 - \varphi_2) \approx 0$ (wielkość porównywalna z trzecią potęgą kąta, czyli zaniedbywalna). W ten sposób otrzymamy liniowy układ dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu, który można rozwiązać metodą macierzową pokazaną w przykładowych rozwiązaniach do poprzedniego zestawu.



Rysunek 1: Podwójne wahadło

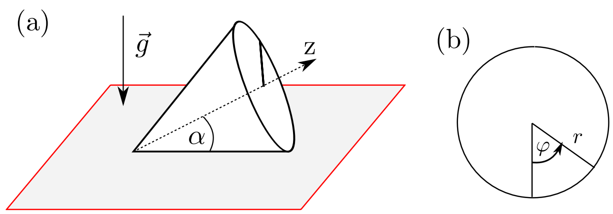
2. Dwa ciała o masach $m_1 = m_2 = m$ mogą się poruszać po płaskiej obręczy o promieniu R ustawionej pionowo w polu grawitacyjnym. Oba ciała są połączone ze sobą oraz z nieruchomym punktem A sprężynkami o stałej sprężystości k. Układ pokazany jest na rysunku 2. Zapisać równanie Lagrange'a układu przy użyciu zmiennych biegunowych, ze względu na więzy liczba współrzędnych uogólnionych wynosi 2 (φ_1, φ_1). Następnie wprowadzić nowe zmienne α_1 i α_2 opisujące wychylenia mas z ich położeń równowagi φ_{10} i φ_{20}: $\varphi_1(t) = \alpha_1(t) + \varphi_{10}$ oraz $\varphi_2(t) = \alpha_2(t) + \varphi_{20}$. Po zmianie zmiennych proszę wygenerować równania ruchu.
   Dla zainteresowanych:
   Rozwiązanie układu można znaleźć w przybliżeniu małych wychyleń (małe wartości α_1 i α_2), które w postaci wektorowej będzie miało postać $\ddot{\vec{\alpha}} = M\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ (układ niejednorodny, M - macierz układu, a wektor $\vec{\beta}$ jest niezależny od czasu). Ponieważ przyjmujemy $m_1 = m_2 = m$ skąd wynika, że w stanie równowagi zachodzi $\varphi_{10} = 2\pi - \varphi_{20}$ (ze względu na symetrię), co znacznie upraszcza postać układu równań

różniczkowych. Następnie należy znaleźć rozwiązanie układu jednorodnego $\ddot{\vec{\alpha}}_j = M\vec{\alpha}_j$ po czym użyć go do skonstruowania rozwiązania układu niejednorodnego $\vec{\alpha}_n = \vec{\alpha}_j + \vec{d}$. Wektor $\vec{\alpha}_n$ wstawiamy do układu niejednorodnego, w którym kasują się dwa wyrazy związane z rozwiązaniem jednorodnym, to co zostanie pozwoli określić wektor $\vec{d}$. Rozwiązania są dwa. Opisują one oscylacje obu mas w tej samej fazie oraz o przeciwnych fazach, niejednorodność natomiast przesuwa punkty równowagi.



Rysunek 2: Układ dwóch ciał na obręczy.

3. Cząstka o masie m porusza się po powierzchni stożka, która styka się z płaszczyzną xy [rys.3(a)]. Kąt rozwarcia stożka wynosi 2α. Układ znajduje sie jednorodnym polu grawitacyjnym skierowanym pionowo w dół. Układ ma dwa stopnie swobody, jako współrzędne uogólnione przyjąć położenie wzdłuż osi stożka z oraz kąt φ [rys.3(b)]. Zapisać równanie Lagrange'a i wyznaczyć równania ruchu.



Rysunek 3: (a) Geometria układu. (b) Przekrój stożka prostopadły do osi z z zaznaczonym kątem φ.

4. Cząstka o masie m może poruszać się po powierzchni sfery o promieniu R bez tarcia. Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Należy:

   a) zapisać lagranżjan w sferycznym układzie współrzędnych, znaleźć równania ruchu oraz określić współrzędne cykliczne i całki ruchu

   b) dokonać transformacji Legendre'a $L \rightarrow H$

   $$H(\theta, p_\theta, p_\varphi = const) = \sum p_i \dot{q}_i - L = p_\varphi \cdot \dot{\varphi} + p_\theta \cdot \dot{\theta} - L(\theta, \varphi, \dot{\theta}) \tag{1}$$

   ponieważ $p_\varphi = const$ czyli jest całką ruchu, więc nastąpi redukcja liczby zmiennych niezależnych $H = H(\theta, p_\theta)$

   c) z funkcji Hamiltona wydobyć równania ruchu i po ich połączeniu (RRZ 2 rzędu dla θ) porównać je z równaniem ruchu uzyskanym w formalizmie Lagrange'a