Podstawy fizyki teoretycznej.
Zestaw 3: formalizm Lagrange'a i Hamiltona
(transformacja Legendre'a, zmienne cykliczne, całki ruchu, nawiasy Poissona) - przykładowe rozwiązania

16 kwietnia 2020

Uwaga: poniżej znajdują się treści kolejnych zadań natomiast ich rozwiążania są podne na kolejnych stronach.

1. Cząstka o masie m poruszająca się w trzech wymiarach oddziałuje z potencjałem
$$U_{\perp} = \alpha \cdot (x^2 + y^2), \qquad \alpha > 0 \tag{1}$$
oraz
$$U_{\parallel} = e \cdot E \cdot z, \quad e, E \in R \tag{2}$$
Należy: (a) zapisać funkcję Lagrange'a we współrzędnych kartezjańskich, (b) znaleźć wyrażenia określające pędy, (c) wykonać transformację Legendre'a i wyznaczyć funkcję Hamiltona, (d) znaleźć równania ruchu w formalizmie Hamiltona oraz (e) podać ich rozwiązania.

2. Rozważyć problem oscylatora izotropowego w trzech wymiarach w formalizmie Hamiltona. Potencjał uwięzienia cząstki ma postać
$$U = \alpha \cdot (x^2 + y^2 + z^2), \qquad \alpha > 0 \tag{3}$$
Pierwszy etap postępowania wymaga wykonania poniższych czynności
   - znaleźć postać lagranżjanu w układzie kartezjańskim
   - dokonać transformacji lagranżjanu do układu sferycznego
   - znaleźć wyrażenia opisujące pędy uogólnione
   - wykonać transformację Legendre'a ($L \to H$) we współrzędnych sferycznych
   - wygenerować równania ruchu

   Następnie przyjmując poniższe warunki początkowe
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = p_\theta = 0 \tag{4}$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} \tag{5}$$
należy
   a) znaleźć trajektorię cząstki dla przypadku szczególnego
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi = 0 \tag{6}$$
   b) określić potencjał efektywny oraz rozważyć możliwość poruszania się cząstki po trajektorii kołowej
   c) korzystając z wyrażenia na energię całkowitą oraz pęd p_φ znaleźć tor (czyli krzywą ale bez zależności czasowej) po którym może poruszać się cząstka

3. Funkcja Hamiltona dla oscylatora izotropowego ma we współrzędnych sferycznych następującą postać

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\, sin^2\theta}\right) + \alpha r^2, \qquad \alpha > 0 \tag{7}$$

Wykorzystując definicję nawiasów Poissona należy sprawdzić czy pędy uogólnione p_r, p_θ i p_φ oraz energia całkowita są całkami ruchu.

1 Cząstka porusza się w potencjale

$$\boxed{U_\perp = \alpha(x^2+y^2) \quad (\alpha>0)} \quad i \quad \boxed{U_\parallel = eE\cdot z}$$

$$\boxed{L = T - U} \qquad \boxed{U = U_\perp + U_\parallel}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$\boxed{L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \alpha(x^2+y^2) - eEz}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \rightarrow \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad \rightarrow \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\boxed{H = \sum p_i \cdot \dot{q}_i - L}$$

$$H = p_x\cdot\dot{x} + p_y\cdot\dot{y} + p_z\cdot\dot{z} - \left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \alpha(x^2+y^2) - eEz\right]$$

$$H = p_x\cdot\frac{p_x}{m} + p_y\cdot\frac{p_y}{m} + p_z\cdot\frac{p_z}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_x^2}{m^2}+\frac{p_y^2}{m^2}+\frac{p_z^2}{m^2}\right) + \alpha(x^2+y^2) + eEz$$

$$H = \underbrace{\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}_{T} + \underbrace{\alpha(x^2+y^2)+eEz}_{U} = \boxed{H(x,y,z,p_x,p_y,p_z)}$$

$$H = T + U$$

Równania ruchu:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i} \qquad \boxed{\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i}$$

1) $\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} = \dot{x}$

2) $\frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} = \dot{y}$

3) $\frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} = \dot{z}$

4) $\frac{\partial H}{\partial x} = 2\alpha x = -\dot{p}_x$

5) $\frac{\partial H}{\partial y} = 2\alpha y = -\dot{p}_y$

6) $\frac{\partial H}{\partial z} = eE = -\dot{p}_z$

z ④ mamy $2\alpha x = -\dot{p}_x \quad / \cdot \frac{d}{dt}$

$$2\alpha \dot{x} = -\ddot{p}_x$$

i wstawiamy do ① $\frac{p_x}{m} = \dot{x} = -\frac{\ddot{p}_x}{2\alpha}$

$$\ddot{p}_x + \frac{2\alpha}{m} p_x = 0 \qquad \boxed{\frac{2\alpha}{m} = \omega^2}$$

równanie oscylatora $\Rightarrow \boxed{\ddot{p}_x + \omega^2 p_x = 0} \Rightarrow \boxed{p_x = A_x \cos(\omega t + \delta_x)}$

- identycznie dostaniemy dla p_y $\Rightarrow \boxed{p_y = A_y \cos(\omega t + \delta_y)}$

z ⑥ mamy

$$eE = -\dot{p}_z = -\frac{dp_z}{dt}$$

$$eE\,dt = -dp \quad / \cdot \int$$

$$\boxed{p = -eEt + C} \qquad \boxed{C = \text{const}}$$

(2) Oscylator izotropowy 3d

$U = \alpha(x^2+y^2+z^2)$ ← potencjał cząstki jest sferycznie symetryczny

$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$

Wprowadzamy współrzędne sferyczne

$$\begin{cases} x = r\sin\Theta\cos\varphi \\ y = r\sin\Theta\sin\varphi \\ z = r\cos\Theta \end{cases}$$

$U = \alpha \cdot r^2$

$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 + r^2\sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2\right)$

$$\boxed{L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \rightarrow L(r,\Theta,\varphi,\dot{r},\dot{\Theta},\dot{\varphi})} \qquad \boxed{L = T - U}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 + r^2\sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \alpha r^2$$

pędy uogólnione:

$$\begin{cases} p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} & \longrightarrow & \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\Theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = mr^2\dot{\Theta} & \longrightarrow & \dot{\Theta} = \frac{p_\Theta}{mr^2} \\ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\Theta\,\dot{\varphi} & \longrightarrow & \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\Theta} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\text{jeśli } =0} - \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{} = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} p_i = 0 \Rightarrow p_i = \text{const} \end{array}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\Theta}^2 - 2\alpha r$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} = mr^2\sin\Theta\cos\Theta\,\dot{\varphi}^2$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \text{const}}$$

φ – zmienna cykliczna

p_φ – całka ruchu

$$\boxed{H = \sum p_i \cdot \dot{q}_i - L}$$

$$H = p_r\cdot\dot{r} + p_\Theta\cdot\dot{\Theta} + p_\varphi\cdot\dot{\varphi} - \left[\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 + r^2\sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \alpha r^2\right]$$

$$H = p_r \cdot \frac{p_r}{m} + p_\Theta \cdot \frac{p_\Theta}{mr^2} + p_\varphi \cdot \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\Theta} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \frac{p_\Theta}{m^2 r^4} + r^2 \sin^2\Theta \frac{p_\varphi}{m^2 r^4 \sin^4\Theta}\right) + \alpha r^2$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\Theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\Theta}\right) + \alpha r^2}$$ funkcja Hamiltona

$H = H(r, \Theta, p_r, p_\Theta)$ bo $p_\varphi = const$

Transformacja $L \to H$ zredukowała liczbę zmiennych niezależnych o 1

Równania ruchu:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i} \qquad \boxed{\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i}$$

1) $\dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m} = \dot{r}$

2) $\dfrac{\partial H}{\partial p_\Theta} = \dfrac{p_\Theta}{mr^2} = \dot{\Theta}$

3) $\dfrac{\partial H}{\partial r} = -\dfrac{p_\varphi^2}{mr^3\sin^2\Theta} + 2\alpha r = -\dot{p}_r$

4) $\dfrac{\partial H}{\partial \Theta} = -\dfrac{p_\varphi^2 \cos\Theta}{mr^2\sin^3\Theta} = -\dot{p}_\Theta$

$\cancel{\dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dot{\varphi}}$ bo $p_\varphi = const$

a) jeśli dla $t=0$ mamy warunki początkowe: $p_\Theta = 0$ i $\Theta = \frac{\pi}{2}$

to z równania (2) otrzymujemy $\dot{\Theta} = 0$

a z rów (3) $(\Theta = \frac{\pi}{2})$ $\dot{p}_\Theta = 0$

ruch w płaszczyźnie xy

założmy dodatkowo że: $p_\varphi = 0$

wówczas z (1) dostaniemy $p_r = m\dot{r}$ $\quad / \cdot \frac{d}{dt}$

$\dot{p}_r = m\ddot{r}$

i wstawiamy do (3)

$$-\frac{\overset{=0}{p_\varphi^2}}{mr^2} + 2\alpha r = -\dot{p}_r = -m\ddot{r}$$

i dostajemy równanie $\boxed{\ddot{r} + \frac{2\alpha}{m} r = 0}$ ← równanie oscylatora 1D

$$\boxed{r = r(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\, t + \sigma\right)}$$

b) Uwzględniamy warunki początkowe ($t=0$) $\underbrace{p_\theta = 0 \text{ i } \Theta = \frac{\pi}{2}}_{\dot{\Theta}=0 \text{ i } \dot{p}_\Theta = 0}$.

Zapiszmy lagranżjan uwzględniając WP:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \underbrace{r^2\dot{\Theta}^2}_{0} + r^2\sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \alpha r^2$$

oraz wyraźmy $\boxed{\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2\Theta}}$ $\qquad$ $\boxed{p_\varphi = const}$ $\quad$ $\boxed{\sin\Theta = \sin\frac{\pi}{2} = 1}$

$$L = \underbrace{\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2 \sin^2\Theta}\right)}_{T} - \underbrace{\alpha r^2}_{U(r)}$$

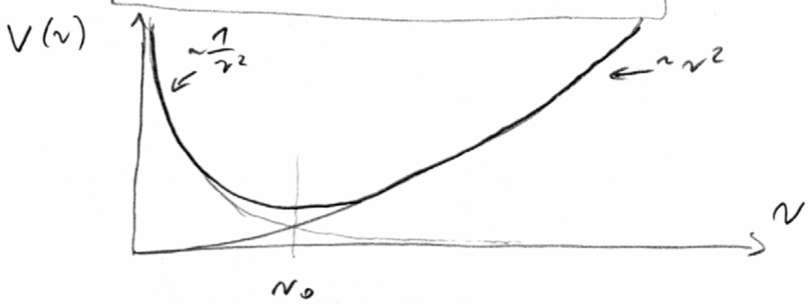
Wiemy że energia całkowita to $\boxed{E = T + U}$

więc możemy zapisać

$$E = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{r}^2}_{T} + \underbrace{\left(\frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \alpha r^2\right)}_{V(r)}$$

Uwaga: ponieważ $p_\varphi = const$ więc wyraz w którym występuje zależy tylko od położenia i możemy go przesunąć do potencjału

$$\boxed{V(r) = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \alpha r^2} \leftarrow \text{wypadkowy potencjał ("całkowity")}$$



część odpychająca $\qquad$ część "przyciągająca" do centrum

$\frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$ $\leftarrow$ potencjał centryfugalny ("odśrodkowy"), nie pozwala cząstce zbliżyć się do 0

$\boxed{\frac{\partial V}{\partial r} = 0}$ $\leftarrow$ warunek minimum $\left(\Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{p}_r = 0\right)$

$$-\frac{p_\varphi^2}{mr^3} + 2\alpha r = 0 \Rightarrow r^4 = \frac{p_\varphi^2}{m\,2\alpha} \Rightarrow \boxed{r_0 = \left(\frac{p_\varphi^2}{2m\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

z ~~...~~ równania ruchu (3) $\frac{\partial H}{\partial r} = -\dot{p}_r = 0$

jeśli dla $t=0$ $p_r = 0$ to z (1) $\frac{p_r}{m} = \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = 0$

Czyli całkowita energia cząstki będzie związana z ruchem obrotowym o stałym $r = r_0 \Rightarrow$ ruch po okręgu.

$$\Downarrow$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r_0^2} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{p_\varphi}{m r_0^2} t + \varphi_0} \qquad \boxed{r = r_0 = \text{const}}$$

c) Znalezienie trajektorii poprzez rozwiązanie równań ruchu (1) i (3) jest w ogólnym przypadku bardzo trudne. W prosty sposób możemy wyznaczyć <u>tor ruchu</u> czyli krzywą po której porusza się cząstka (ale bez zależności czasowej)

Korzystamy z dwóch całek ruchu:

$$\boxed{E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \left(\frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \alpha r^2\right) = \text{const} > 0}$$

oraz $\boxed{p_\varphi = \text{const}} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \underbrace{\sin\Theta}_{=1}} = \frac{p_\varphi}{mr^2}}$

rozdzielając zmienne φ i t otrzymamy:

$$\boxed{dt = \frac{mr^2}{p_\varphi} d\varphi}$$

Podobnie postępujemy z równaniem E rozdzielając r i t:

$$\boxed{dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \alpha r^2\right)}}}$$

Porównując oba wyrażenia otrzymamy:

$$d\varphi = \frac{p_\varphi}{m} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \alpha r^2\right)}}$$

które chcemy scałkować

$$\int d\varphi = \varphi = \frac{p_\varphi}{m}\int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \alpha r^2\right)}} = \left\{\begin{array}{l}\text{podstawiamy} \\ \frac{1}{r} = s \Rightarrow -\frac{1}{r^2}dr = ds\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{p_\varphi}{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m}}}\int \frac{-ds}{\sqrt{1 - \frac{p_\varphi^2}{2mE}s^2 - \frac{\alpha}{E}\frac{1}{s^2}}} = -\frac{p_\varphi}{m}\sqrt{\frac{m}{2E}}\int \frac{s\,ds}{\sqrt{s^2 - \frac{p_\varphi^2}{2mE}s^4 - \frac{\alpha}{E}}} = \dots$$

$$= \left\{\begin{array}{l} s^2 = z \\ 2s\,ds = dz\end{array}\right\} = -\frac{p_\varphi}{m}\sqrt{\frac{m}{2E}}\int \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z - \frac{p_\varphi^2}{2mE}z^2 - \frac{\alpha}{E}}} = \dots$$

$$\dots = \left\{ \left(z - \frac{p_\varphi^2}{2mE}z^2 - \frac{\alpha}{E}\right) = \frac{p_\varphi^2}{2mE}\left[\underbrace{\left(\frac{m^2E^2}{p_\varphi^4} - \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}\right)}_{\beta^2} - \left(z - \frac{mE}{p_\varphi^2}\right)^2\right]\right\} =$$

$$\dots = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{\beta^2 - \left(z - \frac{mE}{p_\varphi^2}\right)^2}} = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{z - \frac{mE}{p_\varphi^2}}{\beta}\right) + \text{const}$$

$$\dots = \left\{ z = s^2,\quad s = \frac{1}{r} \Rightarrow z = \frac{1}{r^2}\right\} = \dots \Rightarrow$$

$$\varphi = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\frac{1}{r^2} - \frac{mE}{p_\varphi^2}}{\beta}\right) \underbrace{-2C}_{=\text{const}}$$

$$\boxed{\sin(C - 2\varphi) = \frac{\frac{1}{r^2} - \frac{mE}{p_\varphi^2}}{\beta}}$$

Ponieważ mamy swobodę w wyborze stałej C, więc podstawmy

$$\boxed{C = -\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = -\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos 2\varphi - \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0}\sin(2\varphi)$$

$$= -\cos 2\varphi =$$

$$= 1 - 2\cos^2\varphi$$

Czyli otrzymujemy

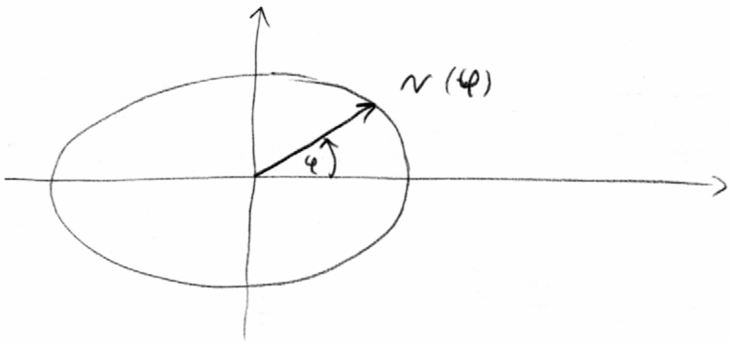
$$\beta(1 - 2\cos^2\varphi) + \frac{mE}{p_\varphi^2} = \frac{1}{r^2} \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{mE}{p_\varphi^2} + \beta\right) - 2\beta\cos^2\varphi}}}$$

Przepisując to wyrażenie w postaci

$$\boxed{r = r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{mE}{p_\varphi^2} + \beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\beta}{\frac{mE}{p_\varphi^2} + \beta}\right)\cos^2\varphi}}}$$

możemy je od razu porównać z równaniem parametrycznym elipsy:

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{b}{a}\frac{1}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi}}}$$

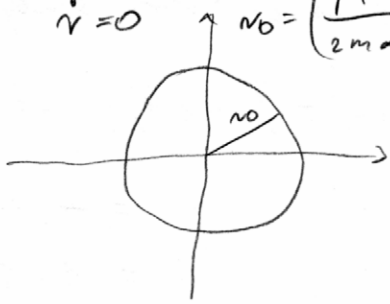


Uwaga: • Wybierając inną stałą C też otrzymalibyśmy elipsę, ale obróconą → opisywaną bardziej skomplikowanym wzorem.

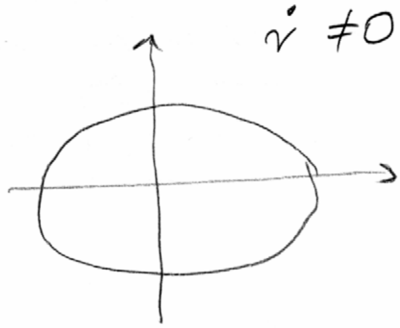
• ponieważ równanie toru jest sparametryzowane stałymi: m, E, p_φ więc w zależności od warunków początkowych będziemy otrzymywać różne trajektorie

$p_\varphi = 0$

$\dot{r} = 0$ $\quad r_0 = \left(\frac{p_\varphi^2}{2m\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}$



$\dot{r} \neq 0$



(3)

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial w}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial w}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) + \frac{\partial w}{\partial t}}$$ ← pochodna zupełna wielkości w (zdefiniowanej w dowolny sposób)

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{dp_i}{dt}} \qquad \boxed{\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}}$$ ← równania ruchu

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial w}{\partial p_i} \left(- \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial w}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] + \frac{\partial w}{\partial t} = \{w, H\} + \frac{\partial w}{\partial t}}$$

jeśli $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ to ewolucja w czasie zależy wyłącznie od $\{w, H\}$

nawias Poissona

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta} \right) + \alpha r^2}$$ ← funkcja Hamiltona oscylatora izotropowego

- $$\frac{dp_r}{dt} = \left(\frac{\partial p_r}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial p_r}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial p_r}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial p_\theta} - \frac{\partial p_r}{\partial p_\theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial p_r}{\partial \varphi} \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial p_r}{\partial p_\varphi} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right)$$

ponieważ argumenty funkcji Hamiltona: $r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi$ są niezależne

więc $\boxed{\frac{\partial p_i}{\partial p_j} = 0 \iff i \neq j}$ oraz $\boxed{\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0}$

i jedyny wyraz który nie znika to

$$\frac{dp_r}{dt} = \left(0 - \frac{\partial p_r}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + (0 - 0) + (0 - 0) = - \frac{\partial H}{\partial r} \neq 0$$

wniosek: p_r nie jest całką ruchu

- $$\frac{dp_\theta}{dt} = \left(\frac{\partial p_\theta}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial p_\theta}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial p_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial p_\theta} - \frac{\partial p_\theta}{\partial p_\theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial p_\theta}{\partial \varphi} \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial p_\theta}{\partial p_\varphi} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) =$$

$$= (0 - 0) + \left(0 - \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) + (0 - 0) = - \frac{\partial H}{\partial \theta} \neq 0$$

wniosek: p_θ nie jest całką ruchu

- $$\frac{dp_\varphi}{dt} = \left(\frac{\partial p_\varphi}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial p_\varphi}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial p_\varphi}{\partial \theta} \frac{\partial H}{\partial p_\theta} - \frac{\partial p_\varphi}{\partial p_\theta} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial p_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial p_\varphi}{\partial p_\varphi} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) =$$

$$= (0 - 0) + (0 - 0) + (0 - 1 \cdot 0) = 0$$

wniosek: p_φ jest całką ruchu

• Czy energia całkowita jest całką ruchu? $\boxed{E = H}$

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Ponieważ w naszym przypadku funkcja Hamiltona nie zależy w sposób jawny od czasu to $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

Natomiast z definicji nawiasów Poissona

$\{A, A\} = 0$ bo każdy wyraz w sumie ma swój odpowiednik, ale z przeciwnym znakiem.

Wniosek: jeśli H nie zależy od czasu to energia całkowita jest zachowana