Podstawy fizyki teoretycznej.

Zestaw 2: formalizm Lagrange'a - zadania do samodzielnego rozwiązania.

2 kwietnia 2020

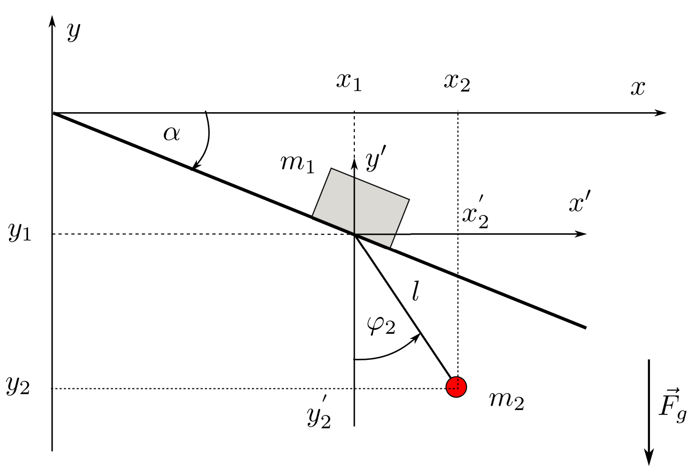
1. Zapisać lagranżjan cząstki swobodnej o trzech stopniach swobody we współrzędnych kartezjańskich, następnie przetransformować go do układu cylindrycznego i sferycznego. Podać interpretację geometryczną prędkości w każdym z tych trzech układów.

2. Dany jest lagranżjan cząstki o dwóch stopniach swobody

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \alpha x y \tag{1}$$

   a) wyznaczyć równania ruchu $[L(x, y, \dot{x}, \dot{y})]$
   b) dokonać obrotu układu współrzędnych o $\pi/4$, czyli wykonać transformację zmiennych $(x, y) \to (x', y')$
   c) przetransformować lagranżjan do nowego układu współrzędnych $[L(x', y', \dot{x}', \dot{y}')]$, wyznaczyć równania ruchu, znaleźć trajektorię

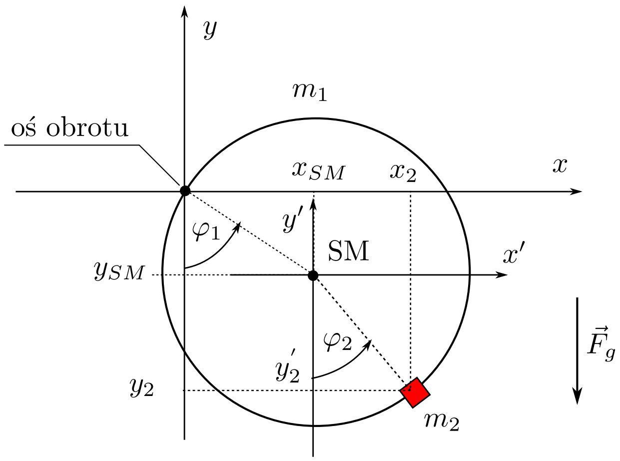
3. Na rysunku 1 pokazane jest wahadło (masa m_1) zamocowane na sztywnej lince o długości l do bloczka o masie m_2. Bloczek zsuwa się bez tarcia po pochylni o kącie nachylenia α. Zapisać lagranżjan i równania ruchu obu ciał. Wskazówki: (i) dla bloczka mamy zależność $y = y(x)$ (więzy) co eliminuje jedną współrzędną, (ii) współrzędne ciała m_2 w układzie inercjalnym (x,y) wyrażamy jako $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_2^{\,\prime}$, współrzędne $\vec{r}_2^{\,\prime}$ określone są w układzie nieinercjalnym związanym z bloczkiem, (iii) drugie równanie więzów określa długość wahadła. Po uwzględnieniu więzów zamiast 4 współrzędnych (x_1, y_1, x_2, y_2) otrzymamy dwie x_1, φ_2, co prowadzi do $L = L(x_1, \varphi_2, \dot{x}_1, \dot{\varphi}_2)$.



Rysunek 1: Wahadło na zsuwającym się po pochylni bloczku.

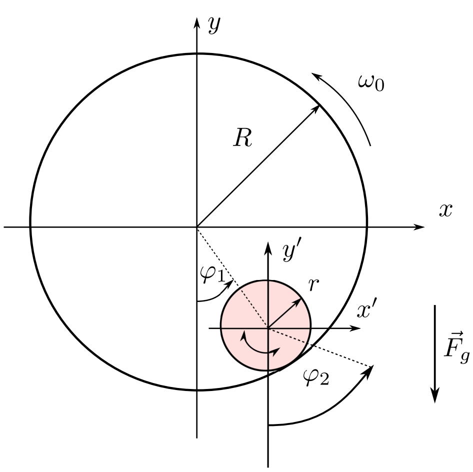
4. Na rysunku 2 pokazany jest układ, w którym obręcz o promieniu R i masie m_1 może obracać się wokół punktu zawieszenia (oś obrotu) w płaszczyźnie xy. Po obręczy może poruszać się bez tarcia koralik o masie m_2. Zapisać lagranżjan układu uwzględniając ruch obrotowy obręczy, moment bezwładności względem punktu zawieszenia obliczyć z twierdzenia Steinera. Wskazówki: (i) ruch wahadłowy obręczy jest skutkiem

działania pola grawitacyjnego na jej środek masy (SM), (ii) współrzędne koralika w układzie inercjalnym (xy) wyznaczyć korzystając z położenia środka masy obręczy oraz położenia w układzie nieinercjalnym ($x'y'$), którego środek jest ustawiony w SM.



Rysunek 2: Koralik m_2 porusza się bez tarcia po obręczy, która obraca się wokół punktu zawieszenia (oś obrotu).

5. Na rysunku 3 pokazany jest układ, w którym po wewnętrznej stronie obręczy o promieniu R może się toczyć **bez poślizgu** kulka o promieniu r i masie m. Środek obręczy ustawiony jest w początku układu inercjalnego xy, wokół którego może ona wirować z prędkością kątową $\omega_0 > 0$ (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Zapisać lagranżjan układu dla warunku $\omega_0 = 0$ i znaleźć równanie ruchu kulki. Zmodyfikować lagranżjan uwzględniając obrót obręczy $\omega_0 > 0$ i znaleźć równanie ruchu. Z równania ruchu odczytać częstość z jaką środek masy kulki będzie oscylować wokół położenia równowagi. Wskazówki: (i) położenie środka masy kulki podać w układzie inercjalnym (xy), a kąt obrotu φ_2 liczymy względem układu nieinercjalnego związanego z SM kulki, (ii) pomiędzy $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, oraz ω_0 istnieje ścisła zależność którą należy wykorzystać (równanie więzów) co zredukuje jeden stopień swobody.



Rysunek 3: Kulka tocząca się bez tarcia po wewnętrznej stronie obręczy będzie zachowywać się jak wahadło ze zmodyfikowaną częstością drgań.