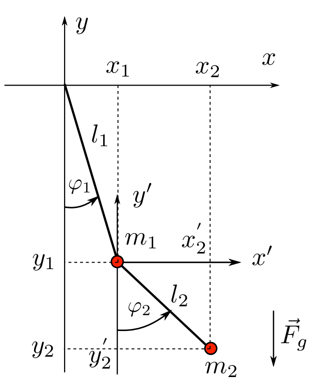
Podstawy fizyki teoretycznej.
Zestaw 2: formalizm Lagrange'a - przykładowe rozwiązania

1 kwietnia 2020

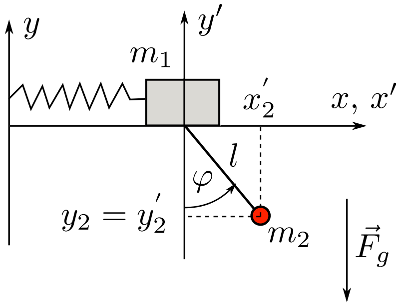
Uwaga: poniżej znajdują się treści kolejnych zadań natomiast ich rozwiążania są podne na kolejnych stronach.

1. **Podwójne wahadło** - rysunek 1. Ciało m_1 jest zawieszone na sztywnej nieważkiej nici o długości l_1 a ciało m_2 jest przymocowane do ciała m_1 nicią o sztywną długości l_2. Na układ działą siła grawiatacyjna skierowana w dół, a układ może poruszać się w płaszczyźnie xy.
   - Zapisać lagranżjan we współrzędnych kartezjańskich, następnie wprowadzić współrzędne uogólnione (φ_1, φ_2) i wygenerować równania ruchu.
   - Rozważyć przypadek małych wychyleń - w lagranżjanie rozwinąć funkcje w szereg Taylora i skasować wyrazy w potędze wyższej niż 2, wygenerować równania ruchu i znaleźć ich rozwiązania (tzw. mody normalne).



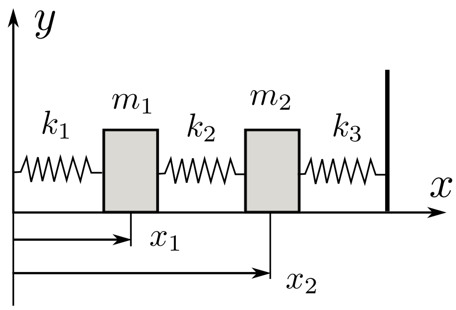
Rysunek 1: Podwójne wahadło

2. **Układ wahadła ze sprężyną** - rysunek 2. Bloczek o masie m_1 jest przymocowany do ściany sprężyną o stałej sprężystości k i może poruszać się tylko w kierunku x. Na bloczku zawieszone jest wahadło o masie m_2 i długości l, które może drgać w płaszczyźnie xy. Wprowadzić współrzędne uogólnione, zapisać lagranżjan układu i wygenerować równania ruchu.



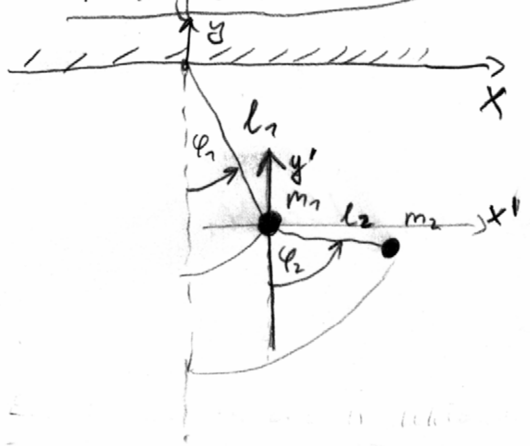
Rysunek 2: Wahadło ze sprężyną

3. **Układ dwóch ciał połączonych sprężynami**. Na rysunku 3 pokazany jest układ dwóch bloczków, które mogą poruszać się w kierunku x bez tarcia. Bloczek o masie m_1 jest połączony sprężyną o stałej sprężystości k_1 z lewą ścianą oraz sprężyną o stałej k_2 z bloczkiem o masie m_2. Drugi bloczek jest połączony sprężyną o stałej k_3 do prawej ściany. Należy zapisać lagranżjan układu, wygenerować równania ruchu oraz znaleźć ich rozwiązania dla przypadku szczególnego ($k_1 = k_2 = k_3 = k$ i $m_1 = m_2 = m$) opisującego ruch kolektywny (tzw. mody normalne).



Rysunek 3: Układ dwóch ciał połączonych sprężynkami.

① Podwójne wahadło



l_1, l_2 -> długości pojedynczych nici

m_1, m_2 -> masy zawieszone na niciach

Lagranżjan:

$$\boxed{L = T - U}$$

$$\boxed{T = T_1 + T_2}$$

$$\boxed{U = U_1 + U_2}$$

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin\varphi_1 \\ y_1 = -l_1 \cos\varphi_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_1 + x_2' \\ y_2 = y_1 + y_2' \end{cases}$$

(x_2', y_2') wsp. w układzie nieinercjalnym związanym z masą m_1

$$x_2' = l_2 \sin\varphi_2$$

$$y_2' = -l_2 \cos\varphi_2$$

$$\dot{x}_1 = l_1 \cos\varphi_1 \, \dot\varphi_1$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \sin\varphi_1 \, \dot\varphi_1$$

$$\boxed{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot\varphi_1^2}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2' = l_1 \cos\varphi_1 \dot\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \dot\varphi_2$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \dot{y}_2' = l_1 \sin\varphi_1 \dot\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \dot\varphi_2$$

$$(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = l_1^2 \dot\varphi_1^2 + l_2^2 \dot\varphi_2^2 + 2 l_1 l_2 \underbrace{(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \dot\varphi_1 \dot\varphi_2$$

$$\boxed{T_1 = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot\varphi_1^2}$$

$$\boxed{T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}\left[l_1^2 \dot\varphi_1^2 + l_2^2 \dot\varphi_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \right]}$$

$$U_1 = m_1 g y_1 = -m_1 l_1 g \cos\varphi_1$$

$$U_2 = m_2 g y_2 = m_2 g (y_1 + y_2') = -m_2 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g l_2 \cos\varphi_2 = -m_2 g [l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2]$$

$$\boxed{\begin{aligned} L = T_1 + T_2 - U_1 - U_2 = \left(\frac{m_1}{2} l_1^2 \dot\varphi_1^2\right) + \left(\frac{m_2}{2}\left[l_1^2 \dot\varphi_1^2 + l_2^2 \dot\varphi_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \right]\right) \\ + m_1 l_1 g \cos\varphi_1 + m_2 g [l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2] \end{aligned}}$$

Co zrobiliśmy? Zapisaliśmy $L(x_1, y_1, x_2, y_2, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2)$

jako $L(\varphi_1, \varphi_2, \dot\varphi_1, \dot\varphi_2)$ we współrzędnych uogólnionych d1] równanie Euler-Lagrange'a pozwoli znaleźć równanie ruchu

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_i} = 0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1\dot\varphi_2 - m_1 g l_1 \sin\varphi_1 - m_2 g l_1 \sin\varphi_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1\dot\varphi_2 - m_2 g l_2 \sin\varphi_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} = m_1 l_1^2 \dot\varphi_1 + m_2 l_1^2 \dot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\dot\varphi_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} = m_2 l_2^2 \dot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} = (m_1+m_2) l_1^2 \ddot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \left[\frac{d}{dt}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right)\cdot\dot\varphi_2 + \cos(\varphi_1-\varphi_2)\frac{d}{dt}(\dot\varphi_2)\right]$$

$$\ldots = \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\cos(\varphi_1-\varphi_2) &= \frac{d}{d\varphi_1}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\cdot\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{d\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dt} = \\ &= -\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1 - \sin(\varphi_1-\varphi_2)(-1)\cdot\dot\varphi_2 \end{aligned} \right\} = \ldots$$

$$\ldots = (m_1+m_2) l_1^2 \ddot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \left[-(\sin\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1\dot\varphi_2 + \sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_2^2 + \cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot\varphi_2\right]$$

1 równanie: $\boxed{\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} = 0}$

$$-m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1\dot\varphi_2 - m_1 g l_1 \sin\varphi_1 - m_2 g l_1 \sin\varphi_1 - (m_1+m_2) l_1^2 \ddot\varphi_1 +$$
$$+ m_2 l_1 l_2 \left[\sin(\varphi_1-\varphi_2)(\dot\varphi_2^2 - \dot\varphi_1\dot\varphi_2) + \cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot\varphi_2\right] = 0$$

dla 2 równania potrzebujemy:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} = m_2 l_2^2 \ddot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2 \left[\frac{d}{dt}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right)\cdot\dot\varphi_1 + \cos(\varphi_1-\varphi_2)\frac{d}{dt}(\dot\varphi_1)\right] =$$
$$= m_2 l_2^2 \ddot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2 \left[-\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1^2 + \sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1\dot\varphi_2 + \cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot\varphi_1\right]$$

2 równanie: $\boxed{\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} = 0}$

$$m_2 l_1 l_2 \sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1\dot\varphi_2 - m_2 g l_2 \sin\varphi_2 - m_2 l_2^2 \ddot\varphi_2 -$$
$$- m_2 l_1 l_2 \left[\sin(\varphi_1-\varphi_2)(\dot\varphi_1\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1^2) + \cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot\varphi_1\right] = 0$$

założenie 1 : $l_1 = l_2 = l$ $m_1 = m_2 = m$

założenie 2 : małe wychylenia z położenia równowagi $\begin{cases} \sin\alpha \approx \alpha \\ \cos\alpha \approx 1 \end{cases}$

Przepiszmy lagranżjan:

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{ml^2}{2}\left[\dot{\varphi}_1^2 + 2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2\right] + mlg\left[2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2\right]$$

Przybliżenie małych wychyleń $\boxed{\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \ldots}$

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{ml^2}{2}\left[\dot{\varphi}_1^2 + 2\left(1 - \frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2}{2}\right)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2\right]$$

$$+ mlg\left[2\left(1-\frac{\varphi_1^2}{2}\right) + \left(1-\frac{\varphi_2^2}{2}\right)\right]$$

$$\underbrace{L \approx \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{ml^2}{2}\left[\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2\right] - mlg\left(\varphi_1^2 + \frac{\varphi_2^2}{2}\right)}_{\text{to jest istotne}} + \Big(\underset{\text{stała}}{mlg\cdot 3} - \underset{\approx 0}{ml^2(\varphi_1-\varphi_2)^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2}\Big)$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -2mlg\varphi_1} \qquad \boxed{\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -mlg\varphi_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = 2ml^2\dot{\varphi}_1 + ml^2\dot{\varphi}_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = ml^2\dot{\varphi}_2 + ml^2\dot{\varphi}_1$$

1 równanie

$$-2mlg\varphi_1 - ml^2(2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) = 0 \qquad /: ml^2 \qquad \sqrt{\frac{g}{l}} = \omega_0$$

2 równanie

$$-mlg\varphi_2 - ml^2(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) = 0 \qquad /: ml^2$$

$$\begin{cases} 2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = -\frac{2g}{l}\varphi_1 \\ \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = -\frac{g}{l}\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

zakładamy rozwiązanie postaci: $\vec{\varphi}(t) = \vec{C}e^{rt}$

$$G\ddot{\vec{\varphi}} = M\cdot\vec{\varphi}$$

$$G\vec{C}r^2e^{rt} = M\vec{C}e^{rt} \Rightarrow r^2G\vec{C} = M\vec{C} \Rightarrow (r^2G - M)\vec{C} = 0$$

$$\boxed{(\nu^2 G - M)\vec{C} = 0} \Leftarrow \text{równanie wiekowe}$$

$$\begin{bmatrix} 2\nu^2 + 2\omega_0^2 & \nu^2 \\ \nu^2 & \nu^2 + \omega_0^2 \end{bmatrix} \vec{C} = 0$$

wyznacznik musi być równy 0

$$(2\nu^2 + 2\omega_0^2)(\nu^2 + \omega_0^2) - (\nu^2)^2 = 0$$

$$2(\nu^2 + \omega_0^2)^2 - (\nu^2)^2 = 0$$

$$\underbrace{\left[\sqrt{2}(\nu^2 + \omega_0^2) - \nu^2\right]}_{I}\underbrace{\left[\sqrt{2}(\nu^2 + \omega_0^2) + \nu^2\right]}_{II} = 0$$

I

$$\sqrt{2}\nu^2 + \sqrt{2}\omega_0^2 - \nu^2 = 0$$

$$(\sqrt{2} - 1)\nu^2 = -\sqrt{2}\omega_0^2$$

$$\nu^2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\omega_0^2 = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\omega_0^2 = -\frac{(2+\sqrt{2})}{2-1}\omega_0^2$$

$$\boxed{\nu_I^2 = -(2+\sqrt{2})\omega_0^2} \qquad \boxed{\nu_I = \pm i\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0} \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0}$$

II

$$\sqrt{2}(\nu^2 + \omega_0^2) + \nu^2 = 0$$

$$(\sqrt{2}+1)\nu^2 = -\sqrt{2}\omega_0^2$$

$$\nu_{II}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\omega_0^2 = -(2-\sqrt{2})\omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\nu_{II} = \pm i\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0}$$

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0}$$

Wektor $\vec{C}_I$ dla ν_I oraz $\vec{C}_{II}$ dla ν_{II} to amplitudy wychyleń obu mas

Szukamy $\vec{C}_I$: $\boxed{(\nu_I^2 G - M)\vec{C}_I = 0}$ ← ma być spełnione (to da warunki na $\vec{C}_I$)

$$\begin{bmatrix} 2(\nu_I^2 + \omega_0^2) & \nu_I^2 \\ \nu_I^2 & (\nu_I^2 + \omega_0^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = (\nu_I^2 + \omega_0^2)\begin{bmatrix} 2 & \frac{\nu_I^2}{\nu_I^2 + \omega_0^2} \\ \frac{\nu_I^2}{\nu_I^2 + \omega_0^2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ \frac{\nu_I^2}{\nu_I^2 + \omega_0^2} = \frac{-(2+\sqrt{2})\omega_0^2}{-(2+\sqrt{2})\omega_0^2 + \omega_0^2} = \frac{(2+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})} = \frac{2-2+\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2} \right\} = \ldots$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad 2C_1 + \sqrt{2}C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{-C_2}{\sqrt{2}} \qquad \boxed{C_2 = -\sqrt{2}\,C_1}$$

$$\vec{C}_{I} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ -\sqrt{2}C_1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = |C_1| e^{i\delta_1} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

C_1 ← liczba zespolona

$\vec{\varphi}_I \Rightarrow$ interesuje nas tylko część rzeczywista

$$Re\{\vec{\varphi}_I\} = Re\{\vec{C}_I e^{\nu_I t}\} = Re\left\{|C_1| e^{i\delta_1} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} e^{\pm i\omega_1 t}\right\} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_1^{(I)}(t) &= |C_1| \cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ \varphi_2^{I}(t) &= -\sqrt{2}|C_1| \cos(\omega_1 t + \delta_1) \end{aligned}}$$

← (a) masy drgają w przeciwnych fazach
(b) amplituda masy m_2 jest $\sqrt{2}$ razy większa niż masy m_1

Szukamy $\vec{C}_{II}$:

$$\boxed{(\nu_{II}^2 G - M)\vec{C}_{II} = 0}$$

$$(\nu_{II}^2 + \omega_0^2)\begin{bmatrix} 2 & \frac{\nu_{II}^2}{\nu_{II}^2 + \omega_0^2} \\ \frac{\nu_{II}^2}{\nu_{II}^2 + \omega_0^2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\nu_{II}^2}{\nu_{II}^2 + \omega_0^2} &= \frac{-(2-\sqrt{2})\omega_0^2}{-(2-\sqrt{2})\omega_0^2 + \omega_0^2} = \frac{-(2-\sqrt{2})}{-(1-\sqrt{2})} = \\ &= \frac{(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{2-2+\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$2C_1 - \sqrt{2}C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}C_2 = \frac{C_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{C_2 = \sqrt{2}C_1}$$

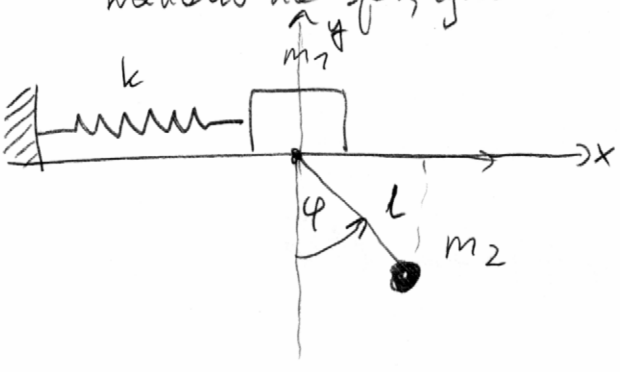
$$\vec{C}_{II} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1\sqrt{2} \end{bmatrix} = |C_1| e^{i\delta_2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$Re\{\vec{\varphi}_{II}\} = Re\{\vec{C}_{II} e^{\nu_{II} t}\} = Re\left\{|C_1| e^{i\delta_2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} e^{\pm i\omega_2 t}\right\} =$$

$$= \boxed{\begin{aligned} \varphi_1^{II}(t) &= |C_1| \cos(\omega_2 t + \delta_2) \\ \varphi_2^{II}(t) &= \sqrt{2}|C_1| \cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{aligned}}$$

obie masy wychylają się z położenia równowagi w tej samej fazie ale z częstością ω_2

② wahadło na sprężynie



$m_1 \to$ wykonuje drgania w kierunku x

$m_2 \to$ porusza się w płaszczyźnie

$$\boxed{L = T - U}$$

$$\boxed{T = T_1 + T_2} \qquad \boxed{U = U_1 + U_2}$$

m_1 : $\boxed{T_1 = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2}$ $\boxed{U_1 = \frac{k}{2}(x_1 - x_{10})^2}$ x_{10} - położenie równowagi

m_2 :

$$x_2 = x_1 + x_2' \longrightarrow \boxed{x_2' = l\sin\varphi - \text{współrzędna } x\text{-owa w układzie nieinercjalnym związanym z masą } m_1}$$

$$x_2 = x_1 + l\sin\varphi$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$y_2 = y_2' = -l\cos\varphi \Rightarrow \frac{dy_2}{dt} = \dot{y}_2 = l\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}\left[(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\,\dot{\varphi})^2 + l^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2\right] = \frac{m_2}{2}\left[\dot{x}_1^2 + 2l\dot{x}_1\cos\varphi\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2\right]$$

$$U_2 = -m_2 g l\cos\varphi$$

$$\boxed{L = T_1 + T_2 - U_1 - U_2 = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left[\dot{x}_1^2 + 2l\dot{x}_1\cos\varphi\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2\right] + m_2 g l\cos\varphi - \frac{k}{2}(x_1 - x_{10})^2}$$

Co zrobiliśmy? Zamieniliśmy $L(x_1, y_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, x_2, y_2, \dot{x}_2, \dot{y}_2)$

w $L(x_1, \dot{x}_1, \varphi, \dot{\varphi})$ (x_1, φ) wsp. uogólnione

równania ruchu

I) $\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - x_{10})$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + m_2(\dot{x}_1 + l\cos\varphi\,\dot{\varphi})$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\ddot{x}_1 + m_2(\ddot{x}_1 + l\cos\varphi\ddot{\varphi} - l\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2)$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0}$$

$$\boxed{-k(x_1 - x_{10}) - (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2 l(\cos\varphi\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2) = 0}$$

II)
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 l \dot{x}_1 \sin\varphi \, \dot{\varphi} - m_2 g l \sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l \dot{x}_1 \cos\varphi + m_2 l^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l \left(\ddot{x}_1 \cos\varphi - \dot{x}_1 \sin\varphi \, \dot{\varphi} \right) + m_2 l^2 \ddot{\varphi}$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0}$$

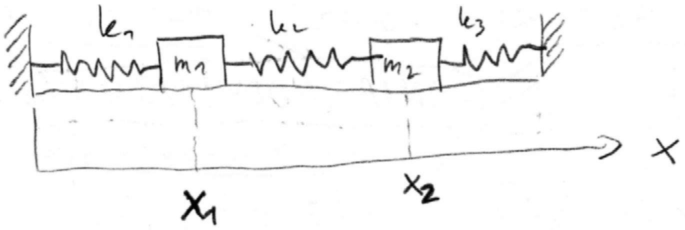
$$\boxed{-m_2 l \sin\varphi \left(\dot{x}_1 \dot{\varphi} + g \right) - m_2 l \left[\left(\ddot{x}_1 \cos\varphi - \dot{x}_1 \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \right) + l \ddot{\varphi} \right] = 0}$$

wygenerowały się obie 2 pochodne

Dostaliśmy (I) i (II) czyli układ 2 RRZ sprzężonych (nieliniowych).

Można poszukiwać prostego rozwiązania w zakresie „małych drgań" → w lagranżjanie pominąć trzeba wyrazy rzędu 3 i wyższe → rozwiązanie opisywałoby mody normalne

(3)



$x_{10}, x_{20} \rightarrow$ początkowe położenie w stanie równowagi

$$\begin{cases} \Delta x_1 = x_1 - x_{10} \\ \Delta x_2 = x_2 - x_{20} \end{cases} \qquad \frac{d(\Delta x_1)}{dt} = \Delta \dot{x}_1 = \dot{x}_1 \qquad \frac{d(\Delta x_2)}{dt} = \Delta \dot{x}_2 = \dot{x}_2$$

$$\boxed{T = T_1 + T_2} \qquad \boxed{T_1 = \frac{m_1}{2}(\Delta \dot{x}_1)^2} \qquad \boxed{T_2 = \frac{m_2}{2}(\Delta \dot{x}_2)^2}$$

$\boxed{U = U_1 + U_2 + U_3}$ ← energie sprężyn (potencjalna)

$\boxed{U_1 = \frac{k_1}{2}(\Delta x_1)^2} \Rightarrow \boxed{U_3 = \frac{k_3}{2}(\Delta x_3)^2}$ oraz oddziaływanie $\boxed{U_2 = \frac{k_2}{2}(\Delta x_2 - \Delta x_1)^2}$

$$U = \frac{k_1}{2}\Delta x_1^2 + \frac{k_3}{2}\Delta x_2^2 + \frac{k_2}{2}\left(\Delta x_2^2 - 2\Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\Delta x_1^2 - k_2 \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 + \frac{1}{2}(k_3 + k_2)\Delta x_2^2$$

$$\boxed{L = T - U = \frac{m_1}{2}\Delta \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\Delta \dot{x}_2^2 - \frac{(k_1 + k_2)}{2}\Delta x_1^2 + k_2 \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 - \frac{(k_2 + k_3)}{2}\Delta x_2^2}$$

Oznaczenia: $\Delta x_1 = s_1 \qquad \Delta x_2 = s_2$

$$\boxed{L = \frac{m_1}{2}\dot{s}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{s}_2^2 - \frac{k_1 + k_2}{2}s_1^2 + k_2 s_1 \cdot s_2 - \frac{(k_2 + k_3)}{2}s_2^2}$$

rów. Eulera-Lagrange'a: $\frac{\partial L}{\partial s_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s_1} &= -(k_1 + k_2)s_1 + k_2 s_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_1} &= m_1 \dot{s}_1 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s_2} &= -(k_2 + k_3)s_2 + k_2 \cdot s_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_2} &= m_2 \dot{s}_2 \end{aligned}}$$

dla m_1 mamy:

$$-(k_1 + k_2)s_1 + k_2 s_2 - m_1 \ddot{s}_1 = 0$$

dla m_2:

$$-(k_2 + k_3)s_2 + k_2 s_1 - m_2 \ddot{s}_2 = 0$$

Układ równań RRZ 2:

$$\begin{cases} \ddot{s}_1 = -\frac{k_1 + k_2}{m_1}s_1 + \frac{k_2}{m_1}s_2 \\ \ddot{s}_2 = -\frac{k_2 + k_3}{m_2}s_2 + \frac{k_2}{m_2}s_1 \end{cases}$$

Przypadek szczególny: $\boxed{k_1 = k_2 = k_3 = k}$ oraz $\boxed{m_1 = m_2 = m}$

$$\boxed{L = \frac{m}{2}(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2) - k(s_1^2 - s_1 \cdot s_2 + s_2^2)}$$

DRGANIA (MODY) NORMALNE

transformacja współrz.

$(s_1, s_2) \to (p_1, p_2)$

Oddziaływanie zależało od: $\boxed{U_2 = k(s_2 - s_1)^2}$

wprowadzamy nowe zmienne: $\boxed{p_1 = \frac{s_2 - s_1}{2}}$ i $\boxed{p_2 = \frac{s_2 + s_1}{2}}$

relacja odwrotna

$\boxed{p_1 + p_2 = s_2}$ i $\boxed{p_2 - p_1 = s_1}$

$$L(s_1, s_2, \dot{s}_1, \dot{s}_2) = \frac{m}{2}(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2) - k(s_1^2 - s_1 \cdot s_2 + s_2^2) =$$

$$= \frac{m}{2}\left[(\dot{p}_2 - \dot{p}_1)^2 + (\dot{p}_1 + \dot{p}_2)^2\right] - k\left[(p_2 - p_1)^2 - (p_2 - p_1)(p_1 + p_2) + (p_1 + p_2)^2\right] =$$

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{d}{dt}(p_2 - p_1) = \dot{p}_2 - \dot{p}_1$$

$$\frac{ds_2}{dt} = \frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = \dot{p}_1 + \dot{p}_2$$

$$= \frac{m}{2}\left[\dot{p}_2^2 - \cancel{2\dot{p}_1\dot{p}_2} + \dot{p}_1^2 + \dot{p}_1^2 + \cancel{2\dot{p}_1\dot{p}_2} + \dot{p}_2^2\right] - k\left[\cancel{p_2^2} - \cancel{2p_1p_2} + p_1^2 + p_1^2 - \cancel{p_2^2} + p_1^2 + \cancel{2p_1p_2} + p_2^2\right]$$

$$= m(\dot{p}_1^2 + \dot{p}_2^2) - k\left[3p_1^2 + p_2^2\right] = \underbrace{\left[m\dot{p}_1^2 - 3kp_1^2\right]}_{L_1(p_1, \dot{p}_1)} + \underbrace{\left[m\dot{p}_2^2 - kp_2^2\right]}_{L_2(p_2, \dot{p}_2)}$$

Dostaliśmy

$$L(s_1, s_2, \dot{s}_1, \dot{s}_2) = L(p_1, p_2, \dot{p}_1, \dot{p}_2) = L_1(p_1, \dot{p}_1) + L_2(p_2, \dot{p}_2)$$

$$\boxed{L_1(p_1, \dot{p}_1) = m\dot{p}_1^2 - 3kp_1^2} \qquad \boxed{L_2(p_2, \dot{p}_2) = m\dot{p}_2^2 - kp_2^2}$$

równanie Eulera-Lagrange'a:

$$\boxed{\frac{\partial L_i}{\partial p_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_i}{\partial \dot{p}_i} = 0}$$

$$\underbrace{\frac{\partial L_1}{\partial p_1} = -6kp_1 \qquad \frac{\partial L_1}{\partial \dot{p}_1} = 2m\dot{p}_1}$$

$$-6kp_1 - 2m\ddot{p}_1 = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial L_2}{\partial p_2} = -2kp_2 \qquad \frac{\partial L_2}{\partial \dot{p}_2} = 2m\dot{p}_2}$$

$$-2kp_2 - 2m\ddot{p}_2 = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{p}_1 = -3\frac{k}{m}p_1 \\ \ddot{p}_2 = -\frac{k}{m}p_2 \end{cases}$$

← Układ 2 RRZ2 niezależnych

kolejny krok → rozwiązania niezależne

cd3

wprowadzamy oznaczenie $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho}_1 = -3\omega_0^2 \rho_1 \\ \ddot{\rho}_2 = -\omega_0^2 \rho_2 \end{cases}$

Rozwiązanie znamy (oscylator harmoniczny):

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_1(t) &= A \cdot \sin(\sqrt{3}\,\omega_0 t + \delta_1) \\ \rho_2(t) &= B \sin(\omega_0 t + \delta_2) \end{aligned}}$$

$\gg$ 2 rozwiązania niezależne

Wracamy do pierwotnych współrzędnych $(\rho_1, \rho_2) \to (s_1, s_2)$

$$s_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} = \frac{1}{2}\left[B \sin(\omega_0 t + \delta_2) + A \sin(\sqrt{3}\,\omega_0 t + \delta_1)\right]$$

$$s_2 = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} = \frac{1}{2}\left[B \sin(\omega_0 t + \delta_2) - A \sin(\sqrt{3}\,\omega_0 t + \delta_1)\right]$$

Rozważmy 2 przypadki szczególne:

I) $A = 0$ i $B \neq 0$ $\begin{cases} s_1(t) = \frac{B}{2} \sin(\omega_0 t + \delta_2) \\ s_2(t) = \frac{B}{2} \sin(\omega_0 t + \delta_2) \end{cases}$

Obie masy (m_1 i m_2) drgają w fazie z częstością ω_0.
Sprężyna k_2 ma cały czas jednakową długość

II) $A \neq 0$ i $B = 0$ $\begin{cases} s_1(t) = \left(\frac{A}{2}\right) \sin(\sqrt{3}\,\omega_0 t + \delta_1) \\ s_2(t) = \left(-\frac{A}{2}\right) \sin(\sqrt{3}\,\omega_0 t + \delta_1) \end{cases}$

Masy m_1 i m_2 drgają w przeciwfazie.
Sprężyna k_2 jest ściskana i rozciągana $\to$ stąd zmiana częstości drgań

Inny ogólniejszy sposób rozwiązania $\Rightarrow$ metoda macierzowa

Przypadek 1 zmiennej: RRZ2 $\boxed{\ddot{y} = -a^2 y}$ $\Rightarrow$ Podstawmy $y = C \cdot e^{rt}$

$C r^2 e^{rt} = -a^2 C e^{rt}$ $\Longleftarrow \begin{cases} \dot{y} = C r e^{rt} \\ \ddot{y} = C r^2 e^{rt} \end{cases}$

$r^2 = -a^2$

$r = \pm i a$

$C, r = \text{const}$ (zespolone)

liczba zespolone

$y(t) = C e^{\pm i a}$

Ale: $C = |C| \cdot e^{i\delta}$, $|C|$ - amplituda, δ - faza

$y(t) = |C| e^{\pm i a} e^{i\delta}$

rozwiązanie musi być rzeczywiste więc $\Rightarrow$ $y(t) = \mathrm{Re}\{|C| e^{\pm i a} e^{i\delta}\} =$
$= |C| \cos(a t + \delta)$

§ 3.3

Cd.3 Dostaliśmy dla jednego wymiaru $\boxed{y(t) = |C| \cos(a \cdot t + \delta)}$

Wróćmy do naszego układu RRZ 2: (strona 3.1 → dół) $\boxed{\begin{matrix} k_1 = k_2 = k_3 = k \\ m_1 = m_2 = m \end{matrix}}$

$$\begin{aligned} \ddot{S}_1 &= -2\frac{k}{m} S_1 + \frac{k}{m} S_2 \\ \ddot{S}_2 &= \frac{k}{m} S_1 - 2\frac{k}{m} S_2 \end{aligned} \xRightarrow{\text{zapis macierzowy}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{S}_1 \\ \ddot{S}_2 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{bmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}}$$

$$\vec{S} = (S_1, S_2) \Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{S}} = M \cdot \vec{S}}$$

Rozwiążmy $\boxed{\ddot{\vec{S}} = M \cdot \vec{S}}$ jak w 1 wymiarze, zakładamy: $\boxed{\vec{S} = \vec{C} \cdot e^{rt}}$

$$\vec{C} r^2 \cancel{e^{rt}} = M \vec{C} \cancel{e^{rt}} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \cdot r^2 \\ C_2 \cdot r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} r^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & r^2 + 2\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ ten układ równań rozwiążemy jeśli wyznacznik macierzy = 0

$$\boxed{\det(I \cdot r^2 - M) = 0} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det = (r^2 + 2\omega_0^2)^2 - (-\omega_0^2)^2 = \underbrace{(r^2 + 2\omega_0^2 + \omega_0^2)}_{(II) = 0} \underbrace{(r^2 + 2\omega_0^2 - \omega_0^2)}_{(I) = 0} = 0$$

I) $r^2 + \omega_0^2 = 0$
$r^2 = -\omega_0^2$
$r = \pm i\omega_0$

II) $r^2 + 3\omega_0^2 = 0$
$r^2 = -3\omega_0^2$
$r = \pm i\sqrt{3}\,\omega_0$

Dla I $\boxed{r_I = \pm i\omega_0}$

Szukamy wektora $\vec{C}$ spełniającego równanie

$$\begin{bmatrix} -\omega_0^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 + 2\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_0^2 (C_1 - C_2) &= 0 \\ \omega_0^2 (-C_1 + C_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{C_1 = C_2} \Leftrightarrow \boxed{\vec{C}_I = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = |C_1| e^{i\delta_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\vec{S}_I = \vec{C}_I e^{r_I t} = |C_1| e^{i\delta_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\pm i\omega_0 t}}$$

Rozwiązanie musi być rzeczywiste, więc: $\boxed{\begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix} = \mathrm{Re}\{\vec{S}_I\} = \begin{bmatrix} |C_1| \cos(\omega_0 t + \delta_1) \\ |C_1| \cos(\omega_0 t + \delta_1) \end{bmatrix}}$

Drganie w fazie

Dla II otrzymujemy:
(drgania w przeciwfazie)

$$\begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix} = \mathrm{Re}\{\vec{S}_{II}\} = \begin{bmatrix} |C_2| \cos(\sqrt{3}\,\omega_0 t + \delta_2) \\ -|C_2| \cos(\sqrt{3}\,\omega_0 t + \delta_2) \end{bmatrix}$$