Podstawy fizyki teoretycznej.
Zestaw 1, elementy rachunku wariacyjnego - problemy do samodzielnego rozwiązania

7 marca 2022

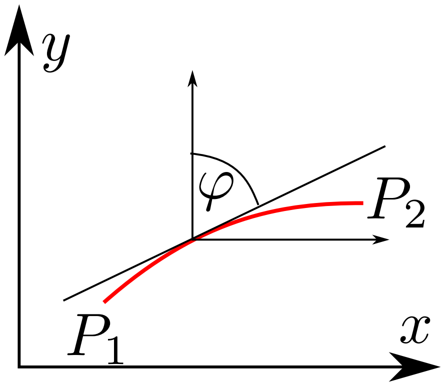
Problemy do samodzielnego rozwiązania:

1. Znaleźć równanie krzywej $y(x)$ łączącej punkty $P_1 = [0,0]$ i $P_2 = [1,1]$ w płaszczyźnie xy dla której funkcjonał
$$I[y] = \int_{P_1}^{P_2} \left(y'^2 + yy' + y^2\right) dx, \qquad y' = \frac{dy}{dx} \tag{1}$$
spełnia warunek stacjonarności (tj. przyjmuje wartość minimalną lub maksymalną).
Wynik: $y(x) = sinh(x)/sin(1)$. W trakcie rozwiązywania problemu pojawią się dwa rozwiązania dla $+C$ i $-C$ $(C > 0)$, jedno z nich należy odrzucić bo nie przechodzi przez oba punkty P_1 i P_2.

2. Znaleźć równanie krzywej $y(x)$ dla której funkcjonał
$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x + xy'^2} dx, \qquad y' = \frac{dy}{dx} \tag{2}$$
jest stacjonarny.
Wynik: $y(x) = 2\sqrt{C}\sqrt{x - C} + D$

3. Znaleźć równanie krzywej $y(x)$ dla której funkcjonał
$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1 - y'^2} dx, \qquad y' = \frac{dy}{dx} \tag{3}$$
jest stacjonarny.
Wynik: $y(x) = C \cdot arc\, sinh(x/C) + D$

4. **Zasada Fermata** mówi, iż bieg promienia świetlnego w ośrodku obywa się po drodze dającej najmniejszy czas przejścia pomiędzy dwoma punktami P_1 i P_2. Wykorzystujemy związek łączący drogę (odcinek ds), prędkość (w danym punkcie u) i czas (przedział dt) $ds = u \cdot dt$ oraz prędkość ze współczynnikiem załamania ośrodka $u = c/n$ (c -prędkość światła w próżni). Czas przejścia pomiędzy dwoma punktami liczymy jako całkę, która stanowi funkcjonał
$$t = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{u} \tag{4}$$
który osiąga minimum dla ruchu rzeczywistego ($u = u(y)$ - prędkość zależy od trajektorii). Korzystając z powyższego funkcjonału proszę pokazać iż dla dowlonego punktu trajektorii prawdziwy jest warunek
$$\frac{sin\varphi}{u} = const \tag{5}$$
gdzie znaczenie kąta φ pokazano na rysunku 1.



Rysunek 1: Ilustracja do zasady Fermata.

5. **Zasada Fermata.** Promień światła porusza się w ośrodku w którym współczynnik załamania określa zależność
$$n = \frac{a}{r^2}, \quad a > 0, \quad r > 0 \tag{6}$$
gdzie r jest odległością od początku układu odniesienia na płaszczyźnie. Proszę skonstruować funkcjonał (podobnie jak w poprzednim zadaniu) dla promienia przechodzącego pomiędzy dwoma punktami. W obliczeniach należy wykorzystać współrzędne biegunowe (r, φ) - w przykładowych rozwiązaniach proszę wyszukać jak wyrażamy element drogi ds w układzie biegunowym. Kąt biegunowy φ liczymy od osi x. Funkcja która będzie minimalizować funkcjonał to $r(\varphi)$. Znaleźć rozwiązanie równania EL a następnie porównać je z równaniem okręgu który przechodzi przez początek układu czyli: R - promień, (x_0, y_0) - środek okręgu dla których zachodzi $x_0^2 + y_0^2 = R^2$. Równanie okręgu oczywiście najpierw należy zapisać w układzie kartezjańskim a następnie przetransformować je do układu biegunowego.