Podstawy fizyki teoretycznej.
Zestaw 1: elementy rachunku wariacyjnego - przykładowe rozwiązania

26 marca 2020

Uwaga: poniżej znajdują się treści kolejnych zadań natomiast ich rozwiązania są podne na kolejnych stronach.

Dla funkcjonału postaci

$$I[y] = \int f(x, y, y')dx \tag{1}$$

gdzie $y' = \frac{dy}{dx}$, równanie krzywej $y(x)$ stanowiącej jego punkt stacjonarny (np. minimum lub maksimum) spełnia równanie Eulera

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{2}$$

Równanie Eulera jest to zazwyczaj RRZ 2 rzędu, które nalezy rozwiązać. Przypadki szczególne:

- jeśli $f = f(x, y')$ to $\partial f/\partial y = 0$ i mamy
$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = const \tag{3}$$
- jeśli $f = f(y, y')$ to po zapisaniu równania Eulera i pomnożeniu go przez y' dostajemy jego całkę pierwszą
$$\frac{d}{dx}\left(f - y' \cdot \frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \tag{4}$$

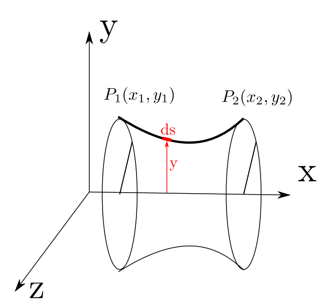
Zadania:

1. Znaleźć równanie krzywej $y(x)$ która minimalizuje funkcjonał
$$I[y] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{x} dx \tag{5}$$
dla warunków: $y(1) = 0$ i $y(2) = 1$.

2. Znaleźć najkrótszą drogę łączącą dwa punkty na płaszczyźnie, tj. pokazać że $y(x)$ jest linią prostą. Funkcjonał ma postać
$$S = \int_{P_1}^{P_2} ds \tag{6}$$
W układzie kartezjańskim element łuku drogi ds powiązany jest z przyrostami dx i dy zależnością $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Po całkę wstawić $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}dx$, a na stępnie zastosować równanie Eulera.

3. Pracując w biegunowym układzie współrzędnych (r, θ) pokazać że krzywa łącząca dwa punkty na płaszczyźnie jest prostą. Zależność elementu łuku drogi wyrażamy jako $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. Uzależnić $r(\theta)$ (θ zmienna niezależna), zapisać element łuku drogi i wstawić do fukcjonału, zastosować równanie Eulera i scałkować uzyskane RRZ. Następnie uzyskane równanie porównać z równaniem prostej dla układu kartezjańskiego, w którym podstawiamy $x = r\cos(\theta)$ i $y = r\sin(\theta)$.

4. Należy znaleźć równanie krzywej $y(x)$ dającą minimalną powierzchnię boczną uzyskaną przez obrót tej krzywej wokół osi x (jak na rysunku 1).



Rysunek 1: Powierzchnia utworzona przez obrót krzywej wokół osi x.

2 przypadki szczególne (ułatwiające znalezienie rozwiązania)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

ogólnie:

$f = f(x, y, y')$

$y = y(x)$

$y' = \frac{dy}{dx} = y'(x)$

a) jeśli $f = f(x, y') \rightarrow$ brak zależności od y

to z rów. EL mamy

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{0} - \underbrace{\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}}_{=0} = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y'} = const}$$

całka pierwsza

b) jeśli $f = f(y, y') \rightarrow$ brak zależności od x

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad / \cdot y'} \Rightarrow \boxed{y'\frac{\partial f}{\partial y} - y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

Policzmy zupełną pochodną f:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{=0} + \boxed{y'\frac{\partial f}{\partial y}} + y''\frac{\partial f}{\partial y'}$$

(i) $\boxed{y'\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dx} - y''\frac{\partial f}{\partial y'}}$ ← $\frac{\partial f}{\partial y}$ mamy w rów EL (1 wyraz)

Policzmy teraz: (ii) $\boxed{y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx}\left(y'\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - y''\frac{\partial f}{\partial y'}}$

Wstawmy (i) i (ii) do rów. EL przemnożonego przez y':

$$y'\frac{\partial f}{\partial y} - y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{df}{dx} \cancel{- y''\frac{\partial f}{\partial y'}} - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \cancel{+ y''\frac{\partial f}{\partial y'}} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Jeśli $f = f(y, y')$ to korzystamy z zależności

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0} \Rightarrow \boxed{f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = const}$$

1. $I[y] = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{x}\,dx \qquad \begin{cases} y(1)=0 \\ y(2)=1 \end{cases}$

$$\boxed{f(x,y,y') = x^{-1}\left(1+(y')^2\right)^{\frac{1}{2}}} \Leftarrow \text{nie zależy od } y\,!$$

równanie EL:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y'} = const = \pm C}$$

trzeba pamiętać że stała może być większa lub mniejsza od zera

$$\boxed{C>0}$$

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = x^{-1}\,\frac{1}{2}\left(1+(y')^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y' = \pm C \qquad /^2 \left(\text{chcemy wyizolować } y'\right)$$

$$\frac{y'^2}{x^2\left(1+(y')^2\right)} = C^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C^2\left[x^2\cdot\left(1+y'^2\right)\right] = C^2x^2 + C^2x^2(y')^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[1-C^2x^2\right] = C^2x^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{C^2x^2}{1-C^2x^2} \qquad /\sqrt{}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}} \qquad /\left(\text{rozdzielamy zmienne}\right)$$

$$dy = \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}\cdot dx \qquad /\int \left(\text{całkujemy}\right)$$

$$\int dy = \int \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}\,dx$$

(cd 1)

$$\frac{d}{dx}\left(1-C^2x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(1-C^2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-C^2\cdot 2x\right) = -\frac{C^2x}{\sqrt{1-C^2x^2}}$$

$$y = -\frac{1}{C}\int \frac{-C^2x}{\sqrt{1-C^2x^2}}\,dx = -\frac{1}{C}\left(1-C^2x^2\right)^{\frac{1}{2}} + D$$

określamy stałe

$$\begin{cases} y(1)=0 \\ y(2)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1) = -\frac{1}{C}\sqrt{1-C^2} + D = 0 \\ y(2) = -\frac{1}{C}\sqrt{1-4C^2} + D = 1 \end{cases}$$

$$① - ② \Rightarrow \quad -\frac{1}{C}\left(\sqrt{1-C^2} - \sqrt{1-4C^2}\right) = -1$$

$$\sqrt{1-C^2} - \sqrt{1-4C^2} = C \quad /^2$$

$$1-C^2 + (1-4C^2) - 2\sqrt{1-C^2}\sqrt{1-4C^2} = C^2$$

$$2-5C^2 - 2\sqrt{1-5C^2+4C^4} = C^2$$

$$-2\sqrt{(1-C^2)(1-4C^2)} = -2+6C^2 \quad /:(-2)$$

$$\sqrt{(1-C^2)(1-4C^2)} = 1-3C^2 \quad /^2$$

$$\cancel{1} - 5C^2 + 4C^4 = \cancel{1} - 6C^2 + 9C^4$$

$$C^2 - 5C^4 = 0$$

$$C^2(1-5C^2) = 0$$

$$\boxed{C=0} \quad \vee \quad 5C^2 = 1$$

odpada

$$C = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ok

$$\boxed{C = +\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$y(1) = -\sqrt{5}\sqrt{1-\frac{1}{5}} + D = 0 \Rightarrow -\sqrt{5-1} + D = 0 \Rightarrow \boxed{D=2}$$

$$\boxed{C = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$y(1) = \sqrt{5}\sqrt{1-\frac{1}{5}} + D = 0 \Rightarrow \sqrt{5-1} + D = 0 \Rightarrow \boxed{D = -2}$$

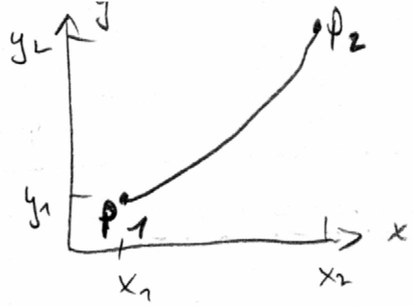
To rozwiązanie odrzucamy bo warunki nie są spełnione: $y(2) \neq 1$

rozwiązanie:

$$y(x) = -\sqrt{5}\sqrt{1-\frac{x^2}{5}} + 2 = -\sqrt{5-x^2} + 2$$

$$\boxed{y(x) = -\sqrt{5-x^2} + 2}$$

(2)



długość krzywej: $S = \int_{P_1}^{P_2} ds$

element łuku: $\boxed{ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$

$$\boxed{S = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx}$$

$$\boxed{f(x,y,y') = \left(1+(y')^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$f = f(y')$ nie zależy od x i y (jawnie)

rów. EL:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{=0} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y'} = \pm C = \text{const} \quad (C>0)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{2}\left(1+(y')^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y' = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \pm C$$

$$y' = C\sqrt{1+(y')^2} \quad /^2$$

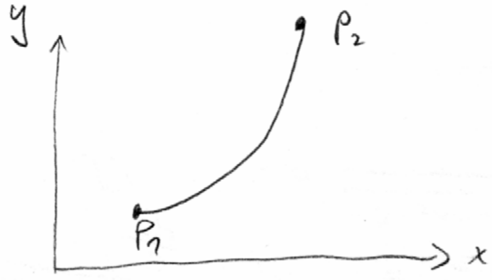
$$\boxed{(y')^2 = C^2\left[1+(y')^2\right]} \Rightarrow \boxed{(y')^2\left(1-C^2\right) = C^2} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{\pm C}{\sqrt{1-C^2}}}$$

$$dy = \frac{\pm C}{\sqrt{1-C^2}}\, dx \quad /\int$$

$$\boxed{y = \frac{\pm C}{\sqrt{1-C^2}}\, x + D = ax + b \qquad a, b = \text{const}}$$

Krzywa o minimalnej długości, która łączy dwa punkty na płaszczyźnie to prosta.

3



$$S = \int_{P_1}^{P_2} ds$$ ← funkcjonał – długość krzywej

$$\boxed{\text{kartezjańskie:} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$\boxed{\text{biegunowe: (zmienna radialna i azymutalna)} \quad ds = \sqrt{dr^2 + (r \cdot d\theta)^2}}$$

Założenie: $\boxed{r = r(\theta)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{ds = d\theta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}}$

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sqrt{r^2 + (r')^2} \Rightarrow \boxed{f = f(r, r') = \sqrt{r^2 + (r')^2}}$$

f niezależy od θ → wykorzystujemy własność rów. EL

r. EL: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial f}{\partial r'} = 0}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{\cancel{2}}\left[r^2 + (r')^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} r}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial r'} = \frac{1}{\cancel{2}}\left[r^2 + (r')^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cancel{2} r' = \frac{r'}{f}}$$

dlaczego? → strona 0

$$r' \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial f}{\partial r'}\right] \equiv \frac{d}{d\theta}\underbrace{\left[f - r'\frac{\partial f}{\partial r'}\right]}_{= \text{const}} = 0$$

$$\boxed{f - r'\frac{\partial f}{\partial r'} = \pm C = \text{const}} \qquad C > 0$$

$$f - r' \cdot \frac{r'}{f} = \pm C \qquad / \cdot f$$

$$f^2 - (r')^2 = \pm C f$$

$$r^2 + \cancel{(r')^2} - \cancel{(r')^2} = \pm C\left[r^2 + (r')^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad /^2$$

$$\boxed{r^4 = C^2 r^2 + C^2 (r')^2}$$

cd3

$$r^4 - C^2 r^2 = C^2 (r')^2 \qquad /:C^2$$

$$\frac{r^2(r^2-C^2)}{C^2} = r'^2 \qquad /\sqrt{\ } \text{ (pierwiastek)}$$

$$\frac{r\sqrt{r^2-C^2}}{C} = \frac{dr}{d\theta} \Rightarrow d\theta = \frac{C}{r\sqrt{r^2-C^2}}\, dr \qquad /\int$$

$$\Theta = C\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-C^2}} = C\int \frac{dr}{rC\sqrt{\left(\frac{r}{C}\right)^2-1}} = \int \frac{\frac{dr}{C}}{\left(\frac{r}{C}\right)\sqrt{\left(\frac{r}{C}\right)^2-1}} \qquad \left\{\frac{r}{C}=\rho\right\}$$

$$= \int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-1}} = \arccos\left(\frac{1}{\rho}\right) + D$$

$$\boxed{\Theta = \arccos\left(\frac{1}{\rho}\right) + D} \Rightarrow \boxed{\Theta - D = \arccos\left(\frac{1}{\rho}\right)} \Rightarrow \cos(\Theta - D) = \frac{1}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{r}{C}\cos(\Theta - D) = 1} \qquad \boxed{r\cos(\Theta - D) = C}$$

$C>0$ (zakładamy że jesteśmy w 1 ćwiartce układu)

równanie prostej w ukł. kartezjańskim

$$\boxed{y = ax + b} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}}$$

$$\boxed{r\sin\varphi = a\, r\cos\varphi + b}$$

równanie prostej w układzie biegunowym

$$r\left[\cos\Theta \cos D + \sin\Theta \sin D\right] = C$$

$$r\sin\Theta \sin D = - r\cos\Theta \cos D + C \qquad /: \sin D$$

$$\boxed{r\sin\Theta = -\frac{\cos D}{\sin D}\, r\cos\Theta + \frac{C}{\sin D}}$$

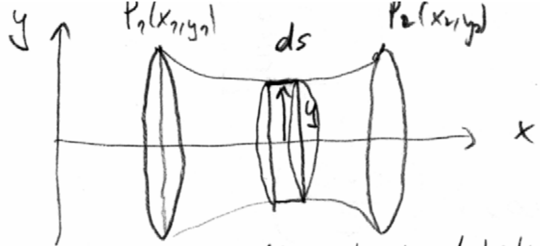
porównujemy z równaniem prostej

$$\boxed{r\sin\varphi = a\, r\cos\varphi + b}$$

dostajemy: $\boxed{\Theta = \varphi}$ $\boxed{a = -\operatorname{tg} D}$ $\boxed{b = \frac{C}{\sin D}}$

W układzie biegunowym otrzymaliśmy identyczny wynik jak w ukł. kartezjańskim tj. równanie prostej

(4)



Pole powierzchni bocznej

$$\boxed{S = \int d\Sigma} \leftarrow \text{element powierzchni}$$

$$\boxed{d\Sigma = \underbrace{\text{obwód}} \cdot \underbrace{\text{"wysokość walca"}} = = 2\pi y \cdot ds}$$

element łuku ("wysokość walca" – lokalna)

$$\boxed{ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$\boxed{S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+(y')^2}\, dx} \Rightarrow \boxed{f = f(y, y')} \leftarrow \text{nie zależy od } x$$

(korzystamy z SO)

rów EL: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \quad / \cdot y'$

$$\boxed{y'\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right] = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left[f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right] = 0}$$

$$\boxed{f = 2\pi \cdot y \cdot \left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y'} = 2\pi y\left[1+(y')^2\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) 2y'}$$

$$\boxed{f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \pm C = \text{const}} \qquad C > 0$$

$$\cancel{2\pi} y\left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}} - y' \cdot \cancel{2\pi} y\left[1+(y')^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot y' = \pm C \qquad / \cdot \left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$y\left[1+(y')^2\right] - y \cdot y'^2 = \pm C\left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$y + \cancel{y y'^2} - \cancel{y y'^2} = \pm C\left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad /^2$$

$$y^2 = C^2\left[1+(y')^2\right]$$

$$\frac{y^2}{C^2} - 1 = (y')^2 \qquad / \sqrt{\ }$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1} \Rightarrow \boxed{dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}}} \qquad \boxed{x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}}}$$

$$\left\{ \frac{y}{C} = z \right\} \qquad x = \int \frac{C\, dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = C \cdot \operatorname{arccosh}(z) + D$$

$\uparrow$ stała całkowania

cd 4

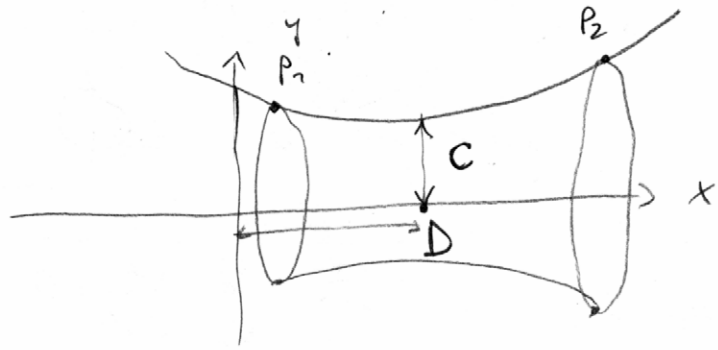
$$\boxed{x = C\,\mathrm{arc\,cosh}(z) + D}$$

$$\boxed{z = \frac{y}{C}}$$

$$\boxed{\cosh\left(\frac{x-D}{C}\right) = z = \frac{y}{C}} \Rightarrow \boxed{y = C\cosh\left(\frac{x-D}{C}\right)}$$

$$\boxed{\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}}$$

tu minimum jest dla $x=0$



D – przesunięcie względem początku układu

C – minimalna odległość powierzchni bocznej od osi Ox